MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS
Liberté
Égalité
Fraternité

Conseil scientifique
de l'éducation nationale

L'OUVERTURE AUX MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE MATERNELLE ET AU CP

Texte rédigé par
Stanislas Dehaene
Avec
Anne Christophe,
Ghislaine Dehaene-Lambertz,
Véronique Izard,
Elena Pasquinelli,
et Elizabeth Spelke

Savoirs & compétences
CSEN
L'ÉCOLE DE LA CONFIANCE

L’ouverture aux mathématiques à l’école maternelle et au CP

Stanislas Dehaene avec Anne Christophe, Véronique Izard, Ghislaine Dehaene-Lambertz, Elena Pasquinelli, Elizabeth Spelke et les membres du Conseil scientifique de l’éducation nationale

Février 2021

Note : Ce document tâche d’extraire, parmi les résultats de la recherche en sciences cognitives, ceux qui nous apparaissent utiles pour l’enseignement des mathématiques en maternelle et à l’école élémentaire. L’état de la recherche dans ce domaine est tel qu’il s’agit rarement de formules clés en main, qui peuvent être directement appliquées à la classe. Il appartient donc aux enseignants de s'en emparer afin de les traduire dans leur pratique de la façon qui leur semblera la plus pertinente. Ces propositions pourraient, à leur tour, faire l’objet d’évaluations rigoureuses de leur impact sur les élèves.

Qu’est-ce que la pensée mathématique ?

On pourrait définir les mathématiques comme “**la science des régularités**” (*the science of patterns*).[1] Partout où il y a des règles précises, et où l’on réfléchit aux conséquences logiques de ces règles, il y a des mathématiques. L’être humain trouve du plaisir à découvrir ces règles et leurs conséquences parfois inattendues, et à les expliquer à d’autres.

Les mathématiques sont aussi “**l’art de la preuve**”: expliquer, démontrer avec des arguments logiques, c’est la base des mathématiques. On y apprend progressivement à construire un raisonnement logique, qui devient une “démonstration” au sens mathématique du terme, c’est-à-dire un argument complet, convaincant, sans la moindre lacune ni zone d’ombre.

Ces deux dimensions des mathématiques (régularités et preuves) n’en sont encore qu’à leurs prémices en maternelle : il faudra des années pour qu’elles se précisent. Cependant, la maternelle est l’occasion d’éveiller l’enfant à ces deux dimensions :

- **Les jeux et les constructions dans l’espace** éveillent son intuition des régularités numériques et géométriques ;
- **Le langage et les interactions avec les autres** éveillent son vocabulaire pour catégoriser le monde et pour argumenter avec de plus en plus de précision.

Ne pas se limiter aux nombres

Dans ces définitions des mathématiques, on voit qu’elles vont **bien au-delà de la simple connaissance des nombres**. Bien sûr, les nombres sont un pilier important des mathématiques, mais ce n’est pas le seul. Introduire les enfants au plaisir des mathématiques, en maternelle, c’est d’abord les faire **jouer avec les formes, les mesures, l’espace, les puzzles, la logique, les ensembles**…

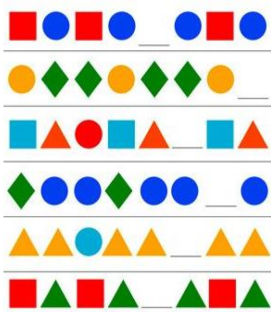
Introduire les mathématiques par le jeu

En maternelle, toutes les mathématiques peuvent être introduites par le jeu et la construction d’objets matériels. En s’appuyant sur de multiples situations concrètes, les enfants découvrent l'utilité des outils mentaux (nombres, mesures, vocabulaire, symboles, règles) que l'humanité s'est donné pour les résoudre. Très progressivement, année après année, leur connaissance des mêmes objets deviendra plus abstraite.

En maternelle, tous les apprentissages peuvent être introduits par le jeu, à condition que le jeu soit pensé dans une optique pédagogique. Il ne s'agit pas ici de laisser les enfants en permanence jouer au petit bonheur. La recherche scientifique montre que la pure pédagogie de la découverte, sans structuration explicite des activités, ne fonctionne pas.[2] Dès lors, quels jeux peuvent être pratiqués en maternelle ?

La recherche montre que **le sens de l'espace est l'un des piliers des mathématiques**, et qu'il peut-être amélioré par de très nombreux jeux, outils et constructions, dès la maternelle[3–6] :

- Les **jeux de construction** (cubes, legos) améliorent les résultats en mathématiques plus tard dans la scolarité. Ils sont particulièrement intéressants lorsqu'on donne à l'enfant un but précis à accomplir (par exemple construire une tour de dix cubes en ordre de taille décroissante -- la célèbre "tour rose Montessori") ou, mieux encore, un plan à imiter, ce qui oblige à passer de deux à trois dimensions, à pratiquer la rotation mentale, à comparer deux échelles de taille différente, à comprendre leur proportionnalité, etc. Bien entendu, ces plans peuvent être extrêmement simples chez les tout petits (par ex. copier une tour avec un cube rouge au-dessus d'une brique bleue). Les jeux de construction offrent également une opportunité remarquable de **parler** de l'espace et de développer le vocabulaire spatial, celui des formes, celui des règles logiques (dessus, dessous, derrière, cube, carré, si-alors, alterner, répéter, etc) ;
- Les **suites ou séries** ("patterns") qu'il faut reproduire ou compléter (avec des gommettes, des legos, des perles…) sont l'occasion de détecter des régularités de nombre, de forme, de taille, d'alignement… Il est également très intéressant de demander à un enfant de dessiner ou de compléter un dessin "en miroir" : le modèle est d'un côté, l'enfant le reproduit par symétrie de l'autre côté, ce qui oblige à comparer, mesurer, compter, repérer les formes identiques... ;



- Les **puzzles** sont une occasion de développer la capacité de visualisation des formes dans l'espace et de rotation mentale (sans parler de la motricité fine et de l'attention visuelle). La recherche montre que la pratique des puzzles améliore les compétences spatiales et mathématiques ultérieures[3] ;
- Les **jeux avec les formes géométriques** tels que cercles, triangles, carrés, losanges, sont extrêmement variés (classements tangram, mandalas à reproduire). Ils développent le sens de l'espace, de l'orientation, de la mesure, des proportions… mais aussi le vocabulaire de la géométrie et la précision manuelle. On fera particulièrement attention à varier les formes: la recherche montre qu'un enfant risque d'apprendre le prototype de triangle (équilatéral, pointe en haut)[7], et qu'il faut donc lui montrer une grande variété de triangles très différents (à classer par exemple) ;

- Les **jeux de cartes** tels que "la bataille", ou les **jeux marchands** tels que "la bonne paie" permettent d'apprendre à estimer et comparer les nombres, à reconnaître les symboles des chiffres, et à développer une intuition des grandeurs numériques et des opérations d'addition et de soustraction. Or, la capacité de comparer les nombres en maternelle est un bon prédicteur de la réussite ultérieure en mathématiques au CP[8, 9] ;

- Les **jeux de dénombrement** développent le sens du nombre et la mémoire de travail numérique et spatiale, qui est également un excellent prédicteur de la réussite en mathématiques.[4] On peut, par exemple, cacher des objets dans une boîte, puis en sortir un certain nombre et faire deviner combien il en reste -- ce petit “mystère” peut augmenter l’intérêt que les enfants portent aux chiffres et au dénombrement, qui est également un bon prédicteur de leur développement mathématique[10] ;
- Chez les enfants un peu plus avancés, les **jeux de plateau**, type “jeu de l’oie” ou “petits chevaux”, où l’on avance un personnage dans l’espace, d’un nombre de cases correspondant à un coup de dés, enseignent la notion de ligne numérique, le sens du nombre exact, du comptage, de l’addition et de la soustraction… Les enfants qui jouent à des jeux de plateau progressent plus vite que les autres en mathématiques et notamment dans la compréhension du sens des nombres[11–14]. Ces jeux sont encore plus bénéfiques si on encourage les enfants à nommer les nombres écrits sur les cases tandis qu’ils avancent leur pion sur le plateau.[12]

En maternelle, la frontière entre jouer et travailler n’existe pas. Tout est jeu, tout est sérieux. C’est pourquoi le travail dans l’espace, avec des outils tels que la règle, le mètre, les ciseaux (et plus tard le compas, les équerres, le rapporteur...) fait aussi partie de l’ouverture aux mathématiques. Les activités suivantes peuvent être proposées aux élèves tout au long du cycle de maternelle :

- **découper et construire** des objets en carton (ce qui amène les enfants à manipuler des plans et des formes géométriques, à mesurer, à comparer des longueurs) ;
- **mesurer** des longueurs, mais aussi des diamètres, des masses, des volumes, des températures... (un thermomètre fournit une excellente introduction à la ligne numérique et aux nombres négatifs!) ;
- **classer** des objets selon leur taille, des collections selon leur nombre…;
- **dessiner** des formes et des objets, avec une précision croissante ;
- **construire** des objets (pâte à modeler, duplos, etc..).

Les avantages de la pratique des jeux mathématiques sont très nombreux. Citons notamment que :

- L’école du jeu, c’est une école plus douce, où l’on prend plaisir à s’amuser ensemble ;
- Le jeu est un excellent **remède à l’anxiété mathématique**, l’angoisse ou même la haine des mathématiques qui se développe chez de nombreux élèves. En effet, par le jeu, on découvre que les objets mathématiques ne sont pas hostiles, mais ludiques, source de plaisir, de beauté ;
- Le jeu à plusieurs développe les **compétences linguistiques et socio-comportementales** (se contrôler, laisser parler les autres, argumenter à bon escient…) ;
- Les jeux n’ont pas besoin d’être compétitifs : ils peuvent être coopératifs.[15] En jouant en petit groupe, vers un objectif commun, les élèves peuvent se critiquer l’un l’autre, s’enseigner des stratégies… la recherche montre que l’enseignement par les pairs fait progresser tous les élèves, aussi bien celui qui enseigne que, bien entendu, celui qui reçoit[16] ;
- La **confiance en soi** se développe également dans les jeux, notamment en solitaire, à mesure que l’enfant revient régulièrement à la même activité et découvre qu’il la maîtrise de mieux en mieux. De nombreuses études montrent que le fait d’aimer les mathématiques, ou d’être persuadé qu’on est “bon en maths”, conduit à la réussite.[17,18]

Aborder le même objet mathématique sous de nombreux angles

La modélisation de l'apprentissage montre qu'on apprend plus vite en variant les tâches et les contextes d'apprentissage.[19] Ainsi, il peut être bénéfique pour un enfant d'aborder un même sujet mathématique par le biais d'activités variées. Le nombre, par exemple, peut être abordé sous différents angles :

- comme le cardinal d'un ensemble d'objets ;
- comme le nombre de côtés d'une forme géométrique (triangle, carré, pentagone…) ;
- comme le numéro d'ordre des éléments d'une série ;
- comme un mot dans la série du comptage ;
- comme une mesure de l'espace, de la longueur ;
- comme une quantité d'argent au jeu "la bonne paie".

Bien comprendre les nombres, c'est passer avec agilité d'une représentation des nombres à l'autre[20]: des quantités aux chiffres, des chiffres aux mots, de l'ordinalité à la cardinalité, etc...En variant les contextes, on aide l'enfant à abstraire ce qu'il y a de commun à tous ces jeux, outils, situations ou problèmes.

Attention : diversifier les contextes d'apprentissage ne veut pas dire les mélanger dans la même séance! Au cours d'une séance, il est très utile d'attirer l'attention sur un contraste minimal, une paire de situations qui ne diffèrent que sur un point, ce qui focalise l'attention de l'enfant sur la différence ("regarde, cette carotte est *grande* alors que celle-ci est *petite*"; ou bien "ici il y a *deux* triangles, tandis que là il y en a un de plus, *trois* triangles"). Cependant, même si l'enfant a compris la différence, un seul exemple de ce type ne lui suffira probablement pas à retenir le concept général. Multiplier les exemples jour après jour pourra aider l'enfant à accéder au concept abstrait (par ex. "à chaque fois que j'ajoute un objet, le nombre augmente de un"). On peut résumer cette discussion d'une formule : "**multiplier les exemples de paires minimales**".

Avoir une approche en spirale

Parce que les concepts mathématiques abstraits émergent très lentement, à partir d'une multiplicité de situations concrètes, il est utile d'avoir **une approche "en spirale".** On commence très tôt à employer des concepts avancés, sans forcément que l'enfant ne les comprenne parfaitement, et on y revient chaque année, dans des contextes multiples et nouveaux, en approfondissant un peu plus à chaque fois.

Prenons l'exemple des fractions: tous les élèves du monde éprouvent des difficultés à comprendre comment le rapport de deux nombres, comme ½ ou ¾, représente un nouveau nombre, ce qu'une telle fraction signifie, et comment la manipuler.[21] Les programmes français introduisent officiellement les fractions très tard, au cycle 3 (typiquement en CM2), et les données montrent qu'elles sont encore extrêmement mal maîtrisées à l'entrée en sixième. Et pourtant, dans la langue naturelle, les mots "moitié" ou "demi" sont appris bien plus tôt, vers 5 ans![22]

Dès la maternelle, l'enfant peut rencontrer des fractions dans de nombreux contextes concrets, qu'il comprend intuitivement: partager un gâteau en deux moitiés égales, répartir un ensemble en deux groupes égaux, avoir envie d'un demi verre d'eau, acheter à moitié prix... Les mots "tiers", "quart", seront naturellement introduits un peu plus tard. L'intuition précoce, construite dès la maternelle, fonde et facilite l'apprentissage ultérieur des mêmes concepts mathématiques sous une forme plus symbolique et rigoureuse.

Enseigner le riche langage des mathématiques

L'exemple des fractions simples montre que ce serait une erreur d'opposer l'enseignement du langage et des mathématiques. En effet, dans tous les domaines, le langage sert à catalyser l'apprentissage des concepts. Il focalise l'attention sur des propriétés remarquables, et oblige l'enfant à faire des distinctions qui ne sont pas forcément évidentes.

C'est pourquoi les enfants devraient souvent entendre parler de nombres, de formes, de logique... **La pensée mathématique s'appuie sur un vocabulaire spécifique** :

- ajouter, soustraire, répartir, alterner, répéter…
- proche, loin
- devant, derrière, dessus, dessous, sur, sous, dans, dehors…
- carré, cercle, rectangle, triangle...
- premier, second, troisième...
- moitié, tiers, quart...
- peu, beaucoup, plus, moins, la plupart, trop....
- avant, après, pendant…
- vrai, faux, certain, probable, peut-être...
- régulier, fréquent, rare, uniforme, différent, identique, symétrique...

La recherche montre que mieux un enfant comprend ces mots, meilleures sont ses compétences en arithmétique élémentaire.[23]

Pour développer le vocabulaire mathématique, l'enseignant peut raconter des **histoires à contenu mathématique** (pensons à Boucle d'Or et les trois ours…). Michel Fayol, par exemple, a développé une série d'histoires qui progressent en complexité dans le domaine des nombres, parce qu'une famille s'agrandit, a besoin de plusieurs paires de chaussures, etc.

L'enseignant doit également "mettre un haut-parleur sur sa pensée", c'est-à-dire expliciter à voix haute, avec la plus grande précision possible, sa réflexion ou son travail, en utilisant un vocabulaire élaboré, riche et précis.

Introduire des outils mentaux, linguistiques et non-linguistiques

Les mots du langage ne sont qu'un exemple de **symbole** qui fixe la pensée mathématique et lui permet de progresser. D'autres exemples de symboles mathématiques sont

- les chiffres arabes
- les signes d'opération + - x et les parenthèses, à la base de l'algèbre
- les symboles des nombres 1 à 6 sur les dés
- le boulier asiatique, où chaque nombre est représenté par une certaine quantité de perles déplacées suivant des configurations fixes.
- La bande numérique (où chaque nombre entier 1, 2, 3… est représenté par une case supplémentaire) et la ligne numérique (où chaque nombre est représenté par une position précise)
- les représentations graphiques : dans la "méthode en barres" que propose Monica Neagoy[24] sur la base des pédagogies utilisées notamment à Singapour, on représente une quantité inconnue par une barre d'une certaine longueur. On peut ensuite diviser ou multiplier cette longueur et résoudre ainsi des problèmes "à une inconnue" bien avant d'apprendre l'algèbre.

Ce n'est évidemment pas en maternelle que tous ces concepts, toutes ces métaphores utiles, tous ces "outils mentaux", seront maîtrisés à la perfection. Mais on peut avoir à l'esprit que c'est la variété des situations, des métaphores rencontrées qui fourniront à l'enfant un vocabulaire d'outils pour toute sa scolarité. Et, selon l'approche "spirale", on peut sans crainte commencer assez tôt, pour créer une première familiarité avec ces outils, sans pour autant penser que tous les détails seront immédiatement compris. La recherche montre par exemple que les enfants de maternelle commencent déjà à comprendre la logique des nombres au-delà de vingt[25] et à approximer les additions de nombres à deux chiffres[26].

Il ne faut pas non plus craindre que l'enrichissement de la maternelle, et notamment de la grande section, en contenus qui anticipent sur les programmes de l'école élémentaire, conduise à un appauvrissement équivalent des compétences socio-émotionnelles des enfants. La recherche en grande section de maternelle montre qu'au contraire, l'introduction de contenus plus avancés corrèle avec le renforcement de compétences telles que les relations inter-personnelles, l'attention, et l'attitude positive face à l'apprentissage - et ce, particulièrement chez les enfants qui partaient avec un bagage moindre dans ce domaine.[27] Ce résultat est à mettre en relation avec les recherches en métacognition, qui montrent comment le sentiment d'auto-efficacité, l'envie d'apprendre et l'image de soi des élèves augmentent avec leur maîtrise d'un domaine.[28]

Evaluer régulièrement où en est chaque enfant

En maternelle, en fonction de leur âge et de leur expérience antérieure, les enfants diffèrent profondément dans leurs compétences, leurs acquis, et donc leurs besoins. Il convient de leur faire pratiquer des activités qui se situent dans leur "zone proximale de développement", c'est-à-dire juste au-delà de ce qu'ils sont déjà capables de faire. C'est là qu'ils trouvent leur plaisir : ce qui est trop facile n'est pas intéressant, ce qui est trop difficile les décourage. Il est donc crucial de savoir évaluer précisément où se situe chaque enfant dans la progression des concepts mathématiques, sans juste se fier simplement à son impression: une recherche a montré que, lorsque les enseignants vérifient régulièrement les progrès des élèves, les enfants progressent plus rapidement, en langage comme en arithmétique.[29] La liste suivante résume les différentes évaluations que ces chercheurs ont proposées aux enfants pour évaluer le niveau de maîtrise d'un enfant dans le domaine des nombres :

Cardinalité	Montrer avec ses doigts combien il y a d'objets sur une page Produire un nombre donné d'objets
Comptage	Pointer vers des objets un par un, en énonçant les nombres correspondants Réciter les noms de nombres dans le bon ordre
Connaissance des chiffres	Nommer chacun des 10 chiffres arabes
Comparaison des nombres et des ensembles	Choisir laquelle des deux mains montre le plus de doigts Trier, dans l'ordre croissant, des cartes montrant de 1 à 5 objets ou doigts
Opérations arithmétiques	Ajouter ou soustraire des objets dans une tasse, et anticiper le résultat Comprendre des histoires qui parlent d'ajouter ou de soustraire des objets.

Découvrir les nombres et l'arithmétique

Le domaine des nombres est celui qui a été le plus exploré par la recherche scientifique, au point qu'on commence à bien comprendre par quelles étapes un enfant passe pour le maîtriser. Nous en résumons ici les principaux résultats.

Ce que les enfants savent déjà. Un enfant qui entre en maternelle n'est pas dépourvu de compétences numériques. La recherche montre que tous les enfants, dès la naissance, comprennent ce que c'est qu'un objet et possèdent un sens du nombre: ils savent reconnaître des collections d'un, deux ou trois objets (cette faculté s'appelle la "subitisation"), et ils peuvent même distinguer des grands nombres, dès lors qu'ils sont bien différents: même un bébé voit la différence entre 4 et 12 objets! Les bébés ont également des rudiments de la manière dont ces nombres se comparent, et peuvent donc comprendre que 12 est plus grand que 4. Enfin, ils ont une idée approximative de l'addition et de la soustraction: certaines expériences montrent qu'un bébé qui voit 5 objets se cacher derrière un écran, puis encore 5, s'attend à ce qu'il se trouve à peu près dix objets derrière l'écran.

La construction mentale des mathématiques s'appuie sur ces compétences précoces de subitisation (nombres 1, 2, 3), et d'estimation approximative. Elle donne aux enfants de maternelle une intuition informelle des nombres, qui deviendra le "sens des nombres". Ainsi, un enfant de maternelle, même s'il ne comprend pas le mot "vingt-quatre", peut avoir l'intuition que cela correspond à une grande quantité, moins grande toutefois que "quarante-deux".[26] Le sens des symboles mathématiques s'ancre dans l'intuition précoce des quantités.

Ce qu'ils doivent acquérir, et comment. L'intuition approximative ne suffit pas. En maternelle, les enfants commencent à apprendre la précision du nombre. C'est l'introduction des symboles pour les nombres (mots et chiffres), et la mise en relation fluide de ces symboles avec les quantités correspondantes, qui sont les facteurs les plus importants du développement mathématique ultérieur de l'enfant.

Cet apprentissage se décline en plusieurs axes.

1. **Apprendre à séparer le nombre des autres dimensions.** C'est en maternelle que l'on commence à comprendre que le nombre est un concept abstrait. Des collections d'objets peuvent avoir le même nombre, même si elles diffèrent sur d'autres dimensions. L'enfant de maternelle doit apprendre à compter des collections d'objets, de sons, de personnes… dans toutes sortes de situations (par exemple: compter le nombre de voitures dans la rue, le nombre de personnes qui entrent et qui sortent d'une pièce, etc).[30] Progressivement, l'enfant apprend à se focaliser sur le nombre, sans se laisser distraire par d'autres dimensions comme la taille des objets.[31]

2. **Apprendre l'égalité des ensembles et l'effet des transformations.** Comprendre l'arithmétique, c'est comprendre comment un ensemble d'objets se transforme lorsqu'on lui ajoute ou retranche un objet. Les jeunes enfants comprennent assez vite la correspondance terme-à-terme, c'est-à-dire le fait que deux ensembles qui sont en correspondance un à un ont le même nombre. Par contre, ils mettent plus de temps à comprendre que certaines transformations changent le nombre, et d'autres non (par exemple, remplacer un objet par un autre ne change pas le nombre).[32] Jouer avec deux ensembles en correspondance, par exemple des poupées et leurs chapeaux, peut donner aux enfants, non seulement un sens de l'égalité numérique, mais aussi l'intuition que toute addition ou soustraction à l'un de deux

ensembles égaux supprime cette égalité, et que deux opérations opposées la rétablissent (par exemple +1 suivi de -1). En cas de remplacement, les enfants ont besoin de développer une véritable abstraction numérique pour résoudre le problème : par exemple, deux chapeaux se salissent, donc deux poupées se retrouvent sans chapeau, et les enfants sont chargés de trouver le bon nombre de remplaçants, ni trop ni trop peu. Ces idées peuvent être étendues aux animaux et aux chaussettes, et ainsi donner une impression intuitive de doublement ou de quadruplement, voire de division par deux ou par quatre.

3. **Apprendre à dénombrer avec exactitude.** Dénombrer une collection est un vrai défi pour l'enfant, et doit être parfaitement consolidé au cours de la maternelle. La procédure de dénombrement comprend plusieurs principes abstraits :
   - principe d'ordre stable : il faut toujours réciter les mots dans le même ordre: "un, deux, trois, quatre, etc.", sans en sauter un seul. Il importe que cette "comptine numérique" soit mise en place rapidement, typiquement en tout début de maternelle (penser notamment aux enfants allophones).
   - principe de correspondance terme à terme : à chaque objet doit correspondre un mot et un seul. On ne doit donc pas compter deux fois le même objet; ni oublier d'en compter un. Le comptage établit une correspondance parfaite entre chacun des objets à compter, et chacun des nombres consécutifs. En maternelle, cette règle peut devenir un jeu: sais-tu compter de droite à gauche, de haut en bas, en sautant un objet pour y revenir ensuite?
   - principe du cardinal : quelle que soit la manière de compter, le dernier mot auquel on arrive possède un statut particulier: c'est le cardinal de l'ensemble, il représente la quantité totale que l'on a dénombrée. C'est la réponse à la question "combien?". Le jeune enfant ne prend pas forcément conscience du statut particulier de ce dernier nombre. Il doit apprendre que dénombrer les objets un par un est la bonne manière de répondre à la question "combien y-a-t-il d'objets". Compter, pour parvenir au cardinal précis d'un ensemble, doit devenir un réflexe chez l'enfant de maternelle.

4. **Apprendre les symboles des nombres et leur sens.** L'acquisition des symboles numériques que sont les nombres cardinaux (un, deux, trois, quatre…), les nombres ordinaux (premier, deuxième, etc), les chiffres (1, 2, 3, 4...) et leurs combinaisons (quarante-deux, 53) est un élément essentiel de la progression en mathématiques, qui commence en maternelle et continue à l'école primaire. Le passage rapide, automatique, inconscient, des symboles vers les quantités correspondantes et vice-versa, dans les premières années d'école, prédit la réussite ultérieure en mathématiques.[33]

   Que faut-il apprendre exactement? D'abord, bien sûr, la forme de ces symboles: savoir lire et écrire les 10 chiffres fait partie des attendus de fin de maternelle, tout autant que savoir réciter rapidement les mots "un, deux, trois, quatre…". Mais cette simple récitation ne suffit absolument pas. La recherche montre qu'un enfant peut très bien faire illusion, parce qu'il sait réciter à toute vitesse les noms de nombres, comme une poésie, mais n'avoir pas la moindre idée de ce qu'ils veulent dire.[34] L'école maternelle doit donner du sens aux nombres. C'est très progressivement, typiquement entre 2 ans ½ et quatre ans, que l'enfant commence à relier les mots à leurs quantités (trois veut dire ⍰). Deux exercices élémentaires permettent d'évaluer cette capacité de compréhension :

   - "Donne-moi un nombre". On prépare une pile d'objets, par exemple des poupées, et on demande à l'enfant "donne-moi deux poupées", "donne-moi trois poupées", etc.

L'enfant qui comprend, par exemple, ce que veut dire le mot "trois", donne toujours *exactement* trois poupées. L'enfant qui ne comprend pas en donne un nombre aléatoire, une poignée ;

- "Combien vois-tu?". On montre à l'enfant un ensemble précis d'objets, soit concrètement, soit dessinés sur une fiche, et on demande "combien vois-tu de poupées?" ou "combien y a-t-il de legos?". L'enfant qui a compris le sens des nombres est capable de nommer, avec précision, le cardinal de l'ensemble (pour les nombres au-delà de 3, il lui faut compter). L'enfant qui n'a pas compris donne un mot au hasard.

La progression est très lente : en petit section de maternelle, il se peut que l'enfant ne réussisse ces tâches qu'avec les tout petits nombres "un" et "deux". Il faudra quelques mois pour progresser jusqu'à "trois", ensuite "quatre". Soudain se produit un déclic mental: à chaque mot de la série du comptage correspond une quantité bien précise d'objets: chaque mot a un sens précis. Cet apprentissage est essentiel: tant que l'enfant n'a pas eu ce déclic, il ne peut pas accéder à d'autres apprentissages.[35] L'enseignant de maternelle pourra favoriser ce passage en étant lui-même précis et exigeant sur cette précision des nombres, comme de tous les mots à contenu mathématique.

5. **Apprendre à comparer les nombres.** Un bon marqueur de la compréhension des nombres, c'est la capacité de les comparer pour déterminer lequel est le plus grand, ou lequel est le plus petit. Comparer est l'une des compétences les plus fondamentales de l'arithmétique, et l'une des plus prédictives de la réussite ultérieure en mathématiques.[8] De plus, les élèves qui souffrent de troubles de la compréhension des nombres et du calcul mental (dyscalculie) éprouvent souvent des difficultés à comparer les grandeurs numériques.

En maternelle, on comparera et on manipulera surtout des quantités concrètes (ensembles, longueurs, etc), tout en les accompagnant des mots ou des chiffres correspondant. A cet âge, il n'est pas facile de comprendre ces symboles seuls, hors contexte. La capacité de faire des calculs simples (additions, soustractions) est bien meilleure, dès 4 ans, lorsque le problème est présenté sous une forme concrète, avec des ensembles d'objets, que sous une forme verbale (phrases) ou symbolique (chiffres arabes).[36] Plus tard, la capacité de comparer les symboles des nombres (par exemple deux nombres écrits en chiffres arabes) apparaît progressivement. Elle nécessite d'associer mentalement chaque nombre avec sa grandeur numérique. Cette opération de conversion des symboles en quantités s'automatise progressivement entre le CP et le CE2.[37]

6. **Apprendre à composer et à décomposer les nombres.** Progressivement, grâce à la manipulation fréquente des ensembles d'objets, se met en place une connaissance fluide des relations entre les nombres. En maternelle, cela commence par les tout petits nombres 1, 2, 3 et 4. "Trois est *entre* deux et quatre". "Quatre, c'est deux *et* deux, ou encore trois *et* un". Progressivement, ce réseau de connaissances s'étend: "une main, c'est cinq doigts", "deux mains c'est dix, donc c'est deux fois cinq". L'enfant avancé possède une compréhension profonde et fluide de ces relations entre les nombres. Il s'en sert pour accélérer la résolution de problèmes, par exemple pour compter plus vite par groupes de deux. La recherche montre que la capacité de compter par groupes, et donc de voir rapidement, par exemple, que 3 groupes de 2, cela fait 6, est un bon indicateur des capacités ultérieures en arithmétique.[38]

Là encore, des activités très variées peuvent stimuler ces apprentissages. Il est amusant, par exemple, de demander à l'enfant de prédire ce qu'il y aura dans une boîte opaque quand on y ajoute des objets un par un, ou deux par deux; ou de lui faire écouter une histoire où trois ours ont besoin, chacun, de deux chaussettes; etc. Varier les situations et les transformations aide à faire comprendre le caractère abstrait du sens du nombre.

7. **Apprendre un modèle mental des nombres : la ligne numérique.** Les nombres ne servent pas qu'à compter, mais aussi à mesurer l'espace. La recherche montre que, chez l'adulte, on ne peut pas penser à un nombre sans évoquer une position dans l'espace, sur une sorte de "ligne numérique mentale". En maternelle, l'enfant découvre que les nombres peuvent s'arranger en ligne, de la gauche vers la droite. Chaque nombre entier 1, 2, 3… occupe une case différente, et ensemble ils forment une "frise" ou une "bande". Cette représentation facilite la compréhension de l'arithmétique: les additions d'entiers correspondent à des déplacements vers la droite et les soustractions à des déplacements vers la gauche. Plus tard, l'enfant pourra comprendre une métaphore un peu plus avancée, celle de la ligne numérique graduée où chaque nombre occupe une place précise. Cela l'aidera à comprendre qu'il y a d'autres nombres "entre" les entiers : les décimaux, par exemple, ou encore les fractions.

   L'importance de la transformation mentale qui se produit en maternelle ne doit pas être sous-estimée. Les jeunes enfants et les adultes non-éduqués ne comprennent pas que les nombres se répartissent *régulièrement* sur la ligne numérique, et que la même distance de 1 sépare tous les nombres consécutifs, quelle que soit leur taille. Ils pensent au contraire que les petits nombres sont distincts, mais que tous les grands nombres se ressemblent. L'acquisition du concept de ligne numérique, qui fonctionne comme un modèle mental de l'espace des nombres, une véritable "règle à calcul" dans la tête, est un tournant essentiel de la pensée de l'enfant.[39]

   Les évaluations nationales de début de CP montrent que les enfants français ont une compréhension insuffisante de la ligne numérique. Comment la faciliter? D'abord, dès la maternelle on peut afficher dans la classe la frise numérique où l'on voit en très grand, de gauche à droite, les nombres de 1 à 10, voire 100: chacun de ces nombres occupe une case différente, un peu comme au jeu de l'oie. On pourra alors se référer en permanence à cette frise pour placer des quantités, des grandeurs, des âges… les uns par rapport aux autres.

   Par ailleurs, un certain nombre de jeux présentés dans ce document peuvent aider les enfants à accéder à une meilleure compréhension de la ligne numérique. Les jeux de plateau comme le jeu de l'oie ou les petits chevaux, où l'on se déplace dans l'espace d'un certain nombre de cases en fonction du nombre tiré aux dés, facilitent l'acquisition ultérieure de l'arithmétique.[11,40] D'autres jeux de mesure de l'espace avec une règle (pour découper un carré d'une taille donnée, par exemple), de rangement dans des cases, ou d'utilisation des coordonnées pour deviner où se trouve un objet caché (type "bataille navale"), ont probablement un effet similaire. La variété des situations qui demandent de mettre en correspondance un nombre avec une longueur ou une position dans l'espace souligne le caractère incontournable de cette idée en mathématiques.

Résumé et recommandations pratiques

- En maternelle, toutes les mathématiques peuvent être introduites par le **jeu** et la **construction** d'objets matériels ;
- Introduire les enfants au **plaisir des mathématiques**, c'est les faire jouer avec les nombres, mais aussi les **constructions**, les **formes**, les **mesures**, l'**espace** et les **cartes**, les **puzzles**, la **logique**, les **ensembles**… ;
- Pour faciliter le passage à l'abstraction, on peut revenir régulièrement sur le même objet mathématique (par exemple le contraste entre deux et trois, ou le concept de nombre "pair"), mais en l'abordant sous de nouveaux angles, **en variant les jeux et les contextes** ;
- Même des objets avancés, comme les nombres au-delà de vingt ou les fractions (demi, moitié) peuvent être introduits **tôt** et être approfondis un peu plus chaque année (dans une **approche en spirale**) ;
- La pensée mathématique s'appuie sur un **vocabulaire** spécifique, que l'enseignant doit utiliser régulièrement et dans toutes ses dimensions, en **mettant un haut-parleur sur sa pensée** ;
- Des **évaluations régulières**, même très simples (tel élève sait-il donner 3 objets ? comprend-il avant et après, dessus et dessous), permettent de mieux adapter les contenus aux besoins des enfants ;
- La **progression pédagogique** devrait tenir compte de ce que l'on connaît de la trajectoire cognitive des enfants. Dans le domaine des nombres, celle-ci comprend :
    - Apprendre à faire **attention au nombre**, à le séparer des autres dimensions
    - Apprendre l'**égalité des ensembles** et l'effet de leurs transformations
    - Apprendre à **dénombrer** avec exactitude
    - Apprendre les **symboles écrits et oraux et des nombres**, et leur sens
    - Apprendre à **comparer** les nombres et à les ordonner
    - Apprendre à **composer** et à **décomposer** les nombres
    - Apprendre un modèle mental des nombres : la **ligne numérique**.

Références scientifiques citées dans ce document

1. Steen, L. A. The Science of Patterns. *Science* **240**, 611–616 (1988).
2. Mayer, R. E. Should there be a three-strikes rule against pure discovery learning? The case for guided methods of instruction. *Am Psychol* **59**, 14–19 (2004).
3. Verdine, B. N., Golinkoff, R. M., Hirsh-Pasek, K. & Newcombe, N. S. Finding the missing piece: Blocks, puzzles, and shapes fuel school readiness. *Trends in Neuroscience and Education* **3**, 7–13 (2014).
4. Newcombe, N. S., Booth, J. L. & Gunderson, E. A. Spatial skills, reasoning, and mathematics. in *The Cambridge handbook of cognition and education* 100–123 (Cambridge University Press, 2019). doi:10.1017/9781108235631.006.
5. Hawes, Z., Moss, J., Caswell, B., Naqvi, S. & MacKinnon, S. Enhancing Children's Spatial and Numerical Skills through a Dynamic Spatial Approach to Early Geometry Instruction: Effects of a 32-Week Intervention. *Cognition and Instruction* **35**, 236–264 (2017).
6. Hawes, Z., Moss, J., Caswell, B., Seo, J. & Ansari, D. Relations between numerical, spatial, and executive function skills and mathematics achievement: A latent-variable approach. *Cognitive psychology* **109**, 68–90 (2019).
7. Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z. & Sarama, J. Young Children's Concepts of Shape. *Journal for Research in Mathematics Education* **30**, 192–212 (1999).
8. Hawes, Z., Nosworthy, N., Archibald, L. & Ansari, D. Kindergarten children's symbolic number comparison skills predict 1st grade mathematics achievement: Evidence from a two-minute paper-and-pencil test. *Learning and Instruction* **59**, 21–33 (2019).
9. Schneider, M. *et al.* Associations of non-symbolic and symbolic numerical magnitude processing with mathematical competence: a meta-analysis. *Developmental Science* **20**, e12372 (2017).
10. Rathé, S., Torbeyns, J., Smedt, B. D. & Verschaffel, L. Spontaneous focusing on Arabic number symbols: A unique component of children's early mathematical development? *Mathematical Thinking and Learning* (2020).
11. Siegler, R. S. & Ramani, G. B. Playing linear numerical board games promotes low-income children's numerical development. *Dev Sci* **11**, 655–61 (2008).
12. Laski, E. V. & Siegler, R. S. Learning from number board games: You learn what you encode. *Developmental Psychology* **50**, 853–864 (2014).
13. Griffin, S., Case, R. & Siegler, R. S. Rightstart: Providing the central conceptual prerequisites for first formal learning of arithmetic to students at risk for school failure. in *Classroom lessons: Integrating cognitive theory and classroom practice* (ed. McGilly, K.) 25–49 (MIT Press, 1986).
14. Case, R., Griffin, S. & Kelly, W. M. Socioeconomic gradients in mathematical ability and their responsiveness to intervention during early childhood. in *Developmental health and the wealth of nations: Social, biological, and educational dynamics.* (eds. Keating, D. P., Hertzman, C., Keating, D. P. (Ed) & Hertzman, C. (Ed)) 125–149 (Guilford Press, 1999).
15. Dillon, M. R., Kannan, H., Dean, J. T., Spelke, E. S. & Duflo, E. Cognitive science in the field: A preschool intervention durably enhances intuitive but not formal mathematics. *Science* **357**, 47–55 (2017).
16. Calero, C. I., Goldin, A. P. & Sigman, M. The Teaching Instinct. *Rev.Phil.Psych.* **9**, 819–830 (2018).
17. Pajares, F. & Miller, M. D. Role of self-efficacy and self-concept beliefs in mathematical problem solving: A path analysis. *Journal of educational psychology* **86**, 193 (1994).
18. Prescott, A. P. *The Concept of Self in Education, Family, and Sports*. (Nova Publishers, 2006).
19. Rougier, N. P., Noelle, D. C., Braver, T. S., Cohen, J. D. & O'Reilly, R. C. Prefrontal cortex and flexible cognitive control: rules without symbols. *Proc Natl Acad Sci U S A* **102**, 7338–43 (2005).
20. Dehaene, S. *La bosse des maths, quinze ans après (seconde édition)*. (Odile Jacob, 2007).
21. Neagoy, M. *Unpacking Fractions: Classroom-Tested Strategies to Build Students' Mathematical Understanding*. (Association for Supervision & Curriculum Development, 2017).
22. Kuperman, V., Stadthagen-Gonzalez, H. & Brysbaert, M. Age-of-acquisition ratings for 30,000 English words. *Behav Res* **44**, 978–990 (2012).
23. Purpura, D. J. & Reid, E. E. Mathematics and language: Individual and group differences in mathematical language skills in young children. *Early Childhood Research Quarterly* **36**, 259–268 (2016).
24. Neagoy, M., Nakatani, N., Szikora, A., Touchard, E. & Jamet, J.-M. *Mathematiques CP Methode de Singapour, Guide Pédagogique Edition 2016*. (LIBRAIRIE DES ECOLES, 2016).
25. Lipton, J. S. & Spelke, E. S. Preschool children master the logic of number word meanings. *Cognition* **98**, B57-66 (2006).

26. Gilmore, C. K., McCarthy, S. E. & Spelke, E. S. Symbolic arithmetic knowledge without instruction. *Nature* **447**, 589–91 (2007).
27. Le, V.-N., Schaack, D., Neishi, K., Hernandez, M. W. & Blank, R. Advanced Content Coverage at Kindergarten: Are There Trade-Offs Between Academic Achievement and Social-Emotional Skills? *American Educational Research Journal* **56**, 1254–1280 (2019).
28. Proust, J. La métacognition: les enjeux pédagogiques de la recherche. (2019).
29. Raudenbush, S. W. *et al.* Longitudinally adaptive assessment and instruction increase numerical skills of preschool children. *PNAS* (2020) doi:10.1073/pnas.2002883117.
30. Mix, K. S. Similarity and Numerical Equivalence: Appearances Count. *Cognitive Development* **14**, 269–297 (1999).
31. Piazza, M., De Feo, V., Panzeri, S. & Dehaene, S. Learning to focus on number. *Cognition* **181**, 35–45 (2018).
32. Izard, V., Streri, A. & Spelke, E. S. Toward exact number: young children use one-to-one correspondence to measure set identity but not numerical equality. *Cogn Psychol* **72**, 27–53 (2014).
33. Geary, D. C. Cognitive Predictors of Achievement Growth in Mathematics: A Five Year Longitudinal Study. *Dev Psychol* **47**, 1539–1552 (2011).
34. Wynn, K. Children's acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive Psychology* **24**, 220–251 (1992).
35. Geary, D. C. *et al.* Early Conceptual Understanding of Cardinality Predicts Superior School-Entry Number-System Knowledge. *Psychol Sci* **29**, 191–205 (2018).
36. Levine, S. C., Jordan, N. C. & Huttenlocher, J. Development of calculation abilities in young children. *J Exp Child Psychol* **53**, 72-103. (1992).
37. Girelli, L., Lucangeli, D. & Butterworth, B. The development of automaticity in accessing number magnitude. *J Exp Child Psychol* **76**, 104–22 (2000).
38. Starkey, G. S. & McCandliss, B. D. The emergence of 'groupitizing' in children's numerical cognition. *Journal of Experimental Child Psychology* **126**, 120–137 (2014).
39. Siegler, R. S. & Opfer, J. E. The development of numerical estimation: evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychol Sci* **14**, 237–43 (2003).
40. Wilson, A. J. *et al.* Principles underlying the design of 'The Number Race', an adaptive computer game for remediation of dyscalculia. *Behav Brain Funct* **2**, 19 (2006).

education.gouv.fr
reseau-canope.fr/conseil-scientifique-de-leducation-nationale

Contact presse
01 55 55 30 10
spresse@education.gouv.fr

Contact Conseil scientifique de l'éducation nationale
csen@education.gouv.fr