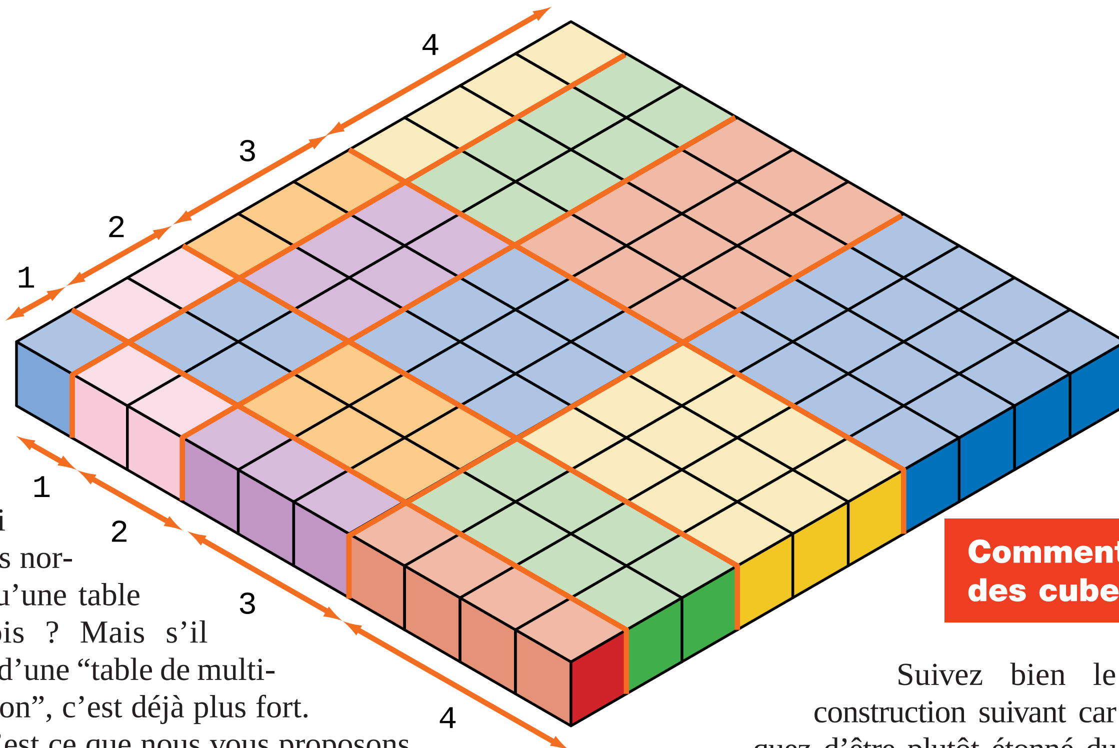
Une table de Pythagore en bois



Quoi de plus normal qu'une table en bois ? Mais s'il s'agit d'une "table de multiplication", c'est déjà plus fort.

Et c'est ce que nous vous proposons de faire avec la construction suivante, qui peut être réalisée avec des cubes de côté unité, éventuellement collés ensemble pour former des barettes ou des rectangles.

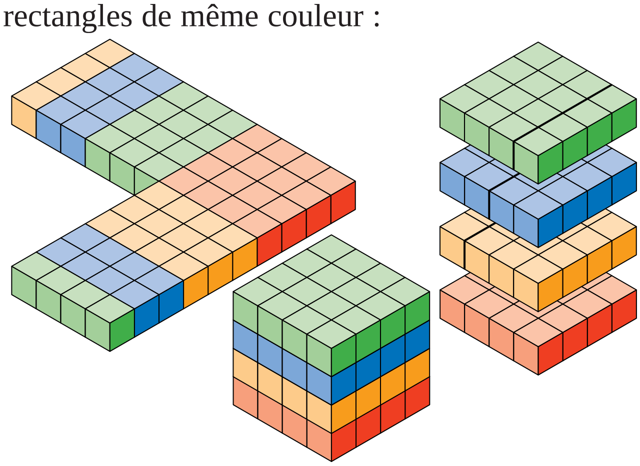
Il s'agit bien d'une table de Pythagore où chaque nombre n est remplacé par un rectangle de n petits cubes (de côtés a et b si $n = a \times b$).

4	4	8	12	16
3	3	6	9	12
2	2	4	6	8
1	1	2	3	4
	1	2	3	4

Comment faire des cubes ?

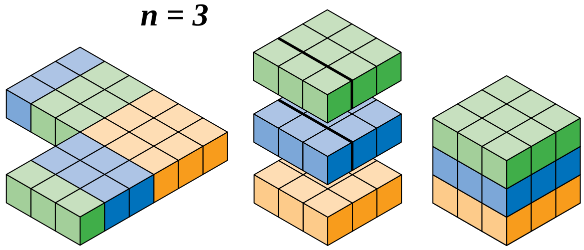
Suivez bien le jeu de construction suivant car vous risquez d'être plutôt étonné du résultat : avec les rectangles de la ligne n et de la colonne n de la "table de Pythagore" en petits cubes de bois, on peut fabriquer un cube (un vrai !).

Par exemple pour $n = 4$, il suffit de replacer les rectangles les uns sur les autres en regroupant les rectangles de même couleur :

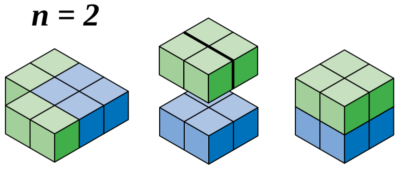


Ce qui est extraordinaire, c'est que l'on peut faire la même chose pour n'importe quel n :

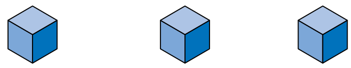
n = 3



n = 2



n = 1



Une belle formule

Cela n'a l'air de rien, mais on a ainsi “établi” une assez belle formule puisqu'il y avait dans la table initiale

$(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$ petits cubes,

et il y en a, dans l'ensemble du gros cube réalisé :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3.$$

Donc

$$\mathbf{(1 + 2 + 3 + \ldots n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3}.$$

Par exemple

$$(1 + 2 + 3 + 4)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3,$$

comme on peut le vérifier

$$10^2 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100.$$

Cette formule, et cette “construction”, signalée par **Edmond Lucas** (*Récréations mathématiques*, Tome 4, éd. Blanchard 1960) étaient déjà connues du mathématicien arabe Al Karaji en l'an 723.

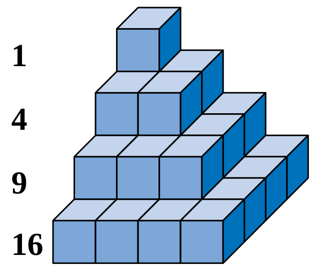
Étonnant non ?

Sauriez-vous l'établir algébriquement ? (Solution page 19).

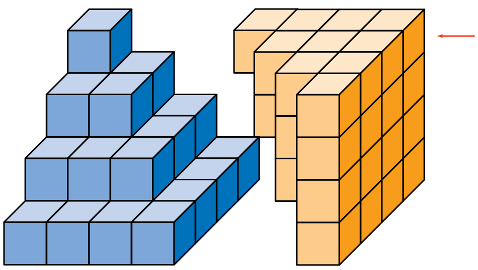
Avec des pyramides

Une somme de cubes est donc égale au carré d'une somme de nombres. Et une somme de carrés ? Combien vaut par exemple

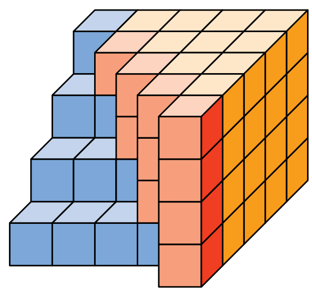
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ ?$$



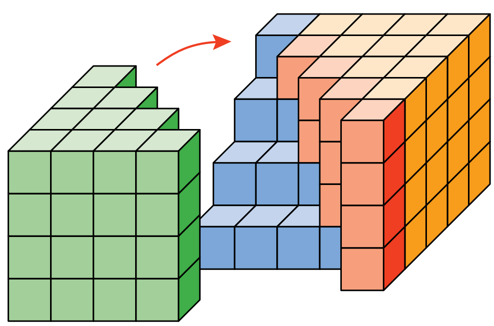
On ajoute la même pyramide sur le côté.



On ajoute les barres de 1, 2, 3, 4 de long.



On finit de remplir avec la pyramide initiale.



Finalement, on obtient un parallèlépipède de $5 \times 5 \times 4$ (soit 100), qui contient trois fois la pyramide initiale (soit 30), plus la somme $1 + 2 + 3 + 4$.

Pour la somme des n premiers carrés, on a d'abord par le même procédé (selon lequel un certain parallélépipède vaut trois fois la pyramide de base plus une certaine somme d'entiers) :

$$(n+1)(n+1)n = 3S + \frac{n(n+1)}{2},$$

avec $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$,

d'où $n(n+1)\left[(n+1) - \frac{1}{2}\right] = 3S$

et $\mathbf{S} = \dfrac{\boldsymbol{n(n+1)(2n+1)}}{\mathbf{6}}$.

(NOTE : on a utilisé le fait que

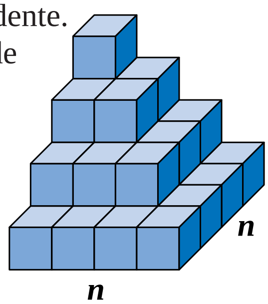
$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

qui est démontré page suivante).

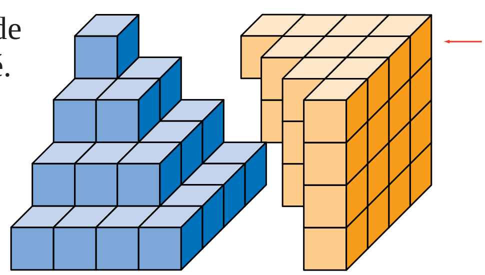
Une construction épatante

Voici une construction qui établit directement la formule précédente.

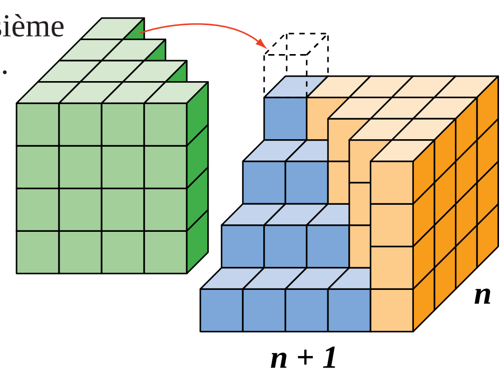
Une pyramide

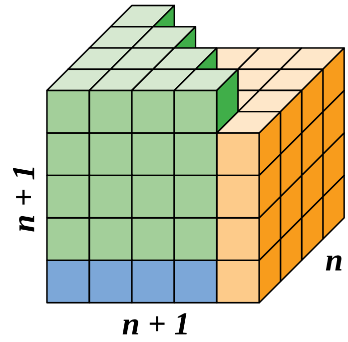


Une seconde collée à côté.

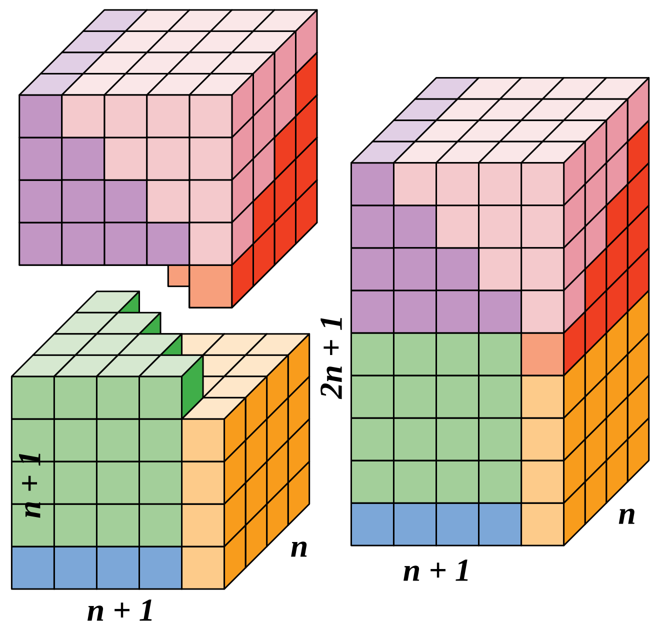


Une troisième au-dessus.





Sur ce bloc de trois pyramides, on peut placer le même bloc "tête en bas" et on obtient le parallélépipède attendu.

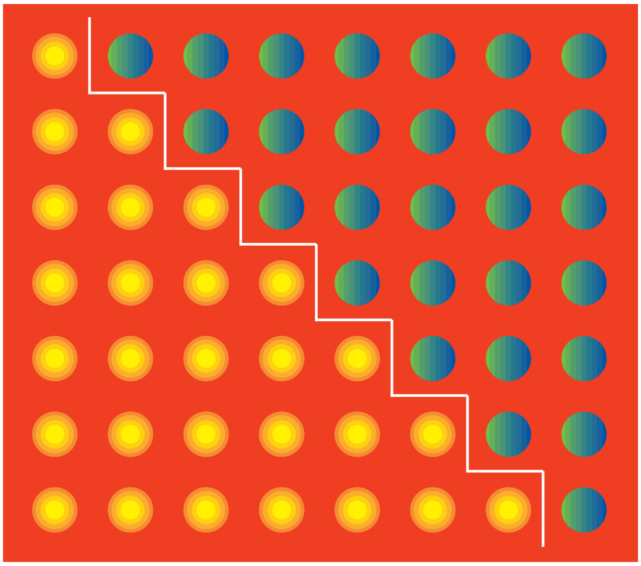


Cet article nous a été inspiré par Jean Brette, responsable des mathématiques au Palais de la Découverte, à Paris.

On trouve d'assez jolies constructions géométriques, et bien d'autres curiosités, dans le tome III de la collection MATHS POUR TOUS "*La magie du calcul*". (Voir p. 32.)

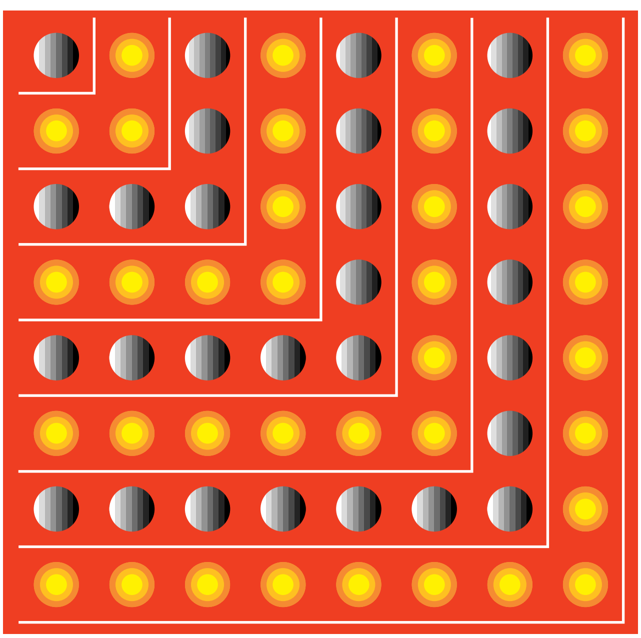
Somme d'entiers

Sur les mêmes idées, mais dans le plan cette fois, voici quelques découpages géométriques conduisant au calcul de certaines sommes.



$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 7 \times \frac{7+1}{2}$$

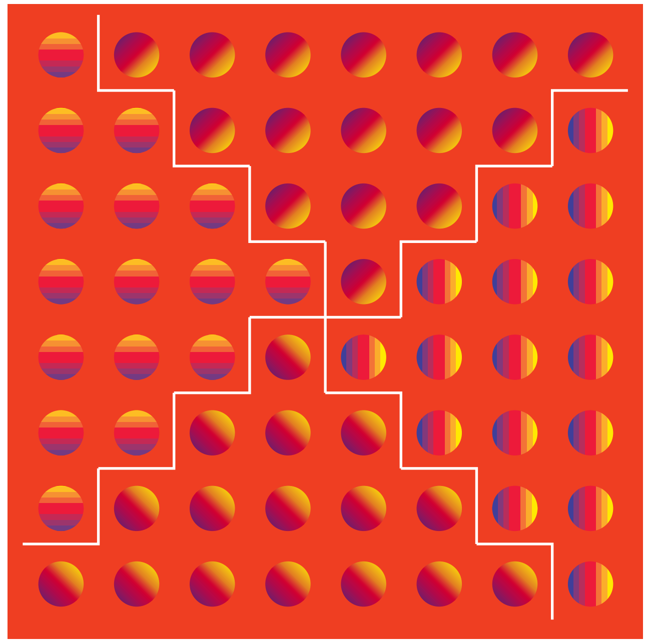
$$\mathbf{1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}}.$$



$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = \left(\frac{13+1}{2}\right)^2$$

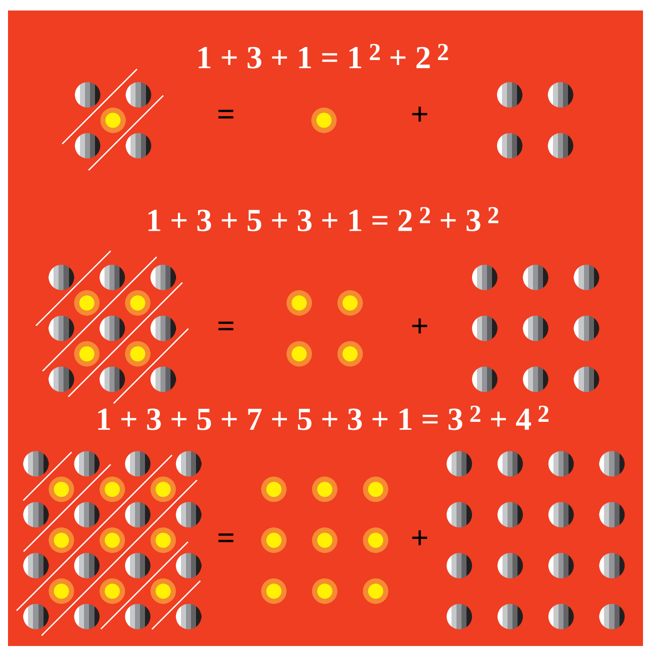
$$\mathbf{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2}.$$

Voici une autre façon d'obtenir la même formule.



$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = \frac{1}{4}(2n)^2 = n^2.$$

Pour terminer, nous vous proposons une variation de la formule précédente imaginée par Hee Sik Kim.



$$\mathbf{1 + 3 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) + (2n - 1) + \ldots + 3 + 1 = n^2 + (n + 1)^2}.$$

Références

E. Lucas, *Récréations mathématiques.*

R. Nelsen, *Proofs without Words.*