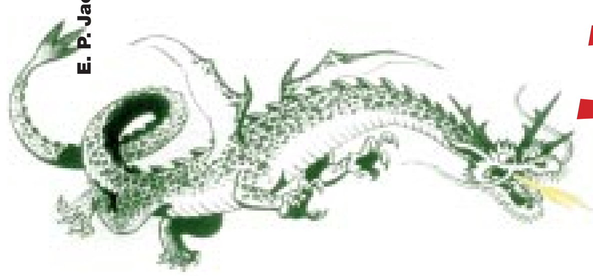


E. P. Jacobs

Fractales

ou comment const un monstre mathéma

Objet fractal : type d'objet dont l'essence même est d'apparaître indéfiniment « brisé » (en lat. *fractus*, brisé), à quelque échelle d'observation que l'on se place. Plus précisément, est "fractale" une forme infiniment imbriquée dans elle-même dont certaines parties sont semblables au tout. La nature nous offre maints objets fractals : une branche d'arbre est un arbre en réduction, une fleur de chou-fleur est un chou-fleur miniature, une feuille de fougère est la réplique d'une fougère, le détail d'un paysage montagneux évoque une montagne toute entière… L'adjectif "fractal" a été forgé par le mathématicien ***Benoît Mandelbrot***. (On dit également *une fractale*).

Dans le domaine géométrique, ***Richardson***, au début du siècle, avait remarqué que la longueur d'une côte dépendait curieusement de l'échelle de la carte sur laquelle on la mesurait (voir plus loin, page 17).

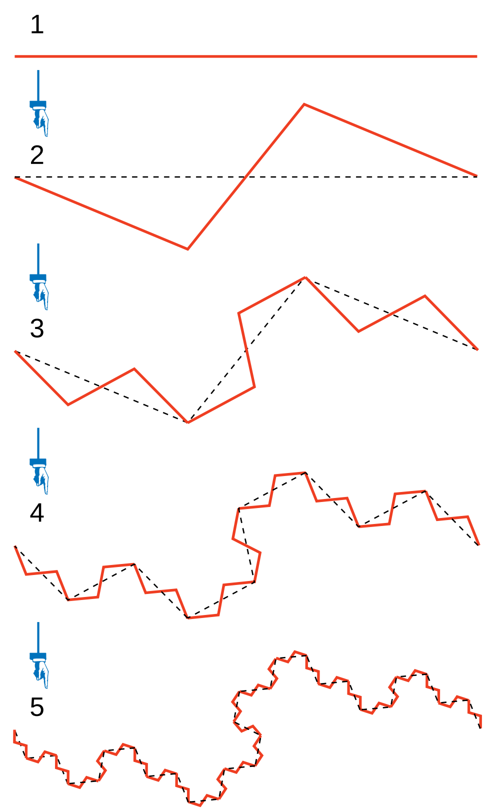
Dans le domaine physique, ***Jean Perrin*** (1870-1942) avait attiré l'attention sur la turbulence catastrophique du mouvement brownien (mouvement désordonné de petites particules, comme celles du pollen, dans un liquide).

Dans le domaine mathématique, c'est au XIX e s., que les questions de continuité et de dérivabilité furent suffisamment éclaircies pour que certains objets monstrueux viennent côtoyer les courbes traditionnelles que l'on savait construire sans peine à main levée.

Les premiers monstres

L'idée qu'une courbe, tout en restant d'un seul tenant dans une région donnée, puisse présenter une infinité de points anguleux nous paraît aujourd'hui très acceptable. Il suffit de penser à un processus de brisure que l'on répéterait indéfiniment.

Par exemple :



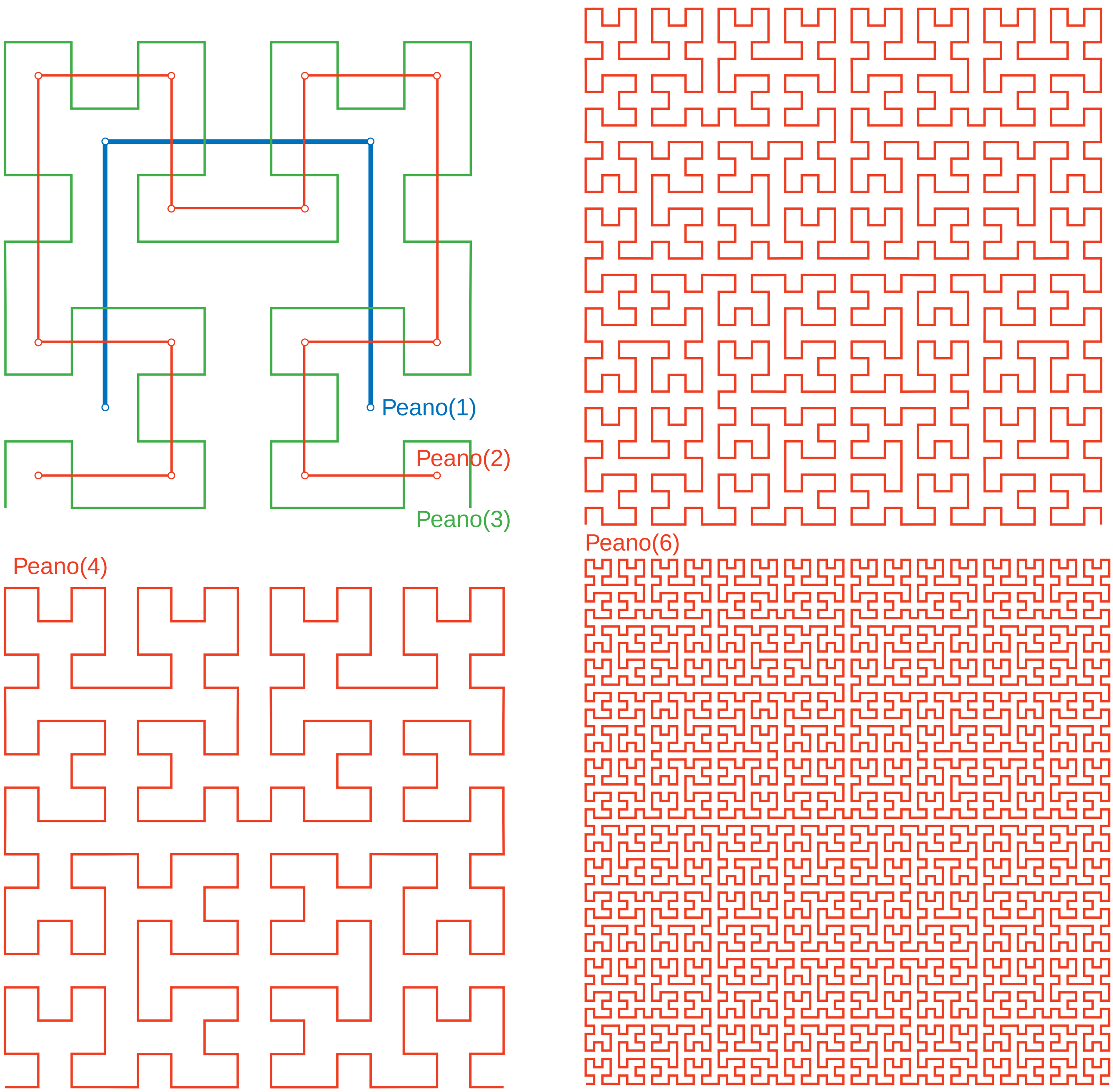
Cependant, la notion de courbe, liée à celle de fonction, ne fut véritablement dominée que vers les années 1880-1890.

Karl Weierstrass (1815-1897) donne le premier exemple explicite de fonction continue n'ayant de dérivée en aucun point :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(5^n x)}{2^n}.$$

Georg Cantor (1845-1918) établit le résultat suivant : il existe une bijection entre le côté d'un carré et l'intérieur de ce carré, c'est-à-dire entre un objet de dimension 1 et un objet de dimension 2.

fig. 1 : vers la courbe de Peano



Petit à petit, on s'habituera à manipuler ces notions délicates : ***Giuseppe Peano*** (1858-1932) exhibe ainsi en 1890 une courbe qui remplit véritablement tout un carré ; elle se définit comme la limite d'une suite de courbes dont nous avons dessiné les six premières (fig. 1).

Helge von Koch, en 1904, dessina le flocon de neige le plus célèbre de l'histoire des mathématiques qui est un exemple de courbe sans tangente en aucun point (fig. 2).

La première définition d'une dimension non entière fut ainsi proposée par ***Félix Hausdorff*** (1868-1942) en 1919. À partir de là se trouvait mise en évidence l'existence d'au moins deux concepts de dimension : une dimension algébrique, liée à la notion de produit cartésien, et une dimension topologique, liée à la notion de recrouvement.

fig. 2 : vers la courbe de von Koch

Comment fabriquer des fractales ?

Toute matière remplie de trous ou agitée de turbulences présente de façon naturelle une structure fractale essentiellement irrégulière ; on ne peut pas imiter les moindres détails de cette irrégularité, mais on peut bâtir des modèles, certes plus réguliers, mais présentant des caractéristiques (en particulier dimensionnelles) analogues.

Voici une technique simple de construction de fractales :

— on part d'un segment [AB] ;

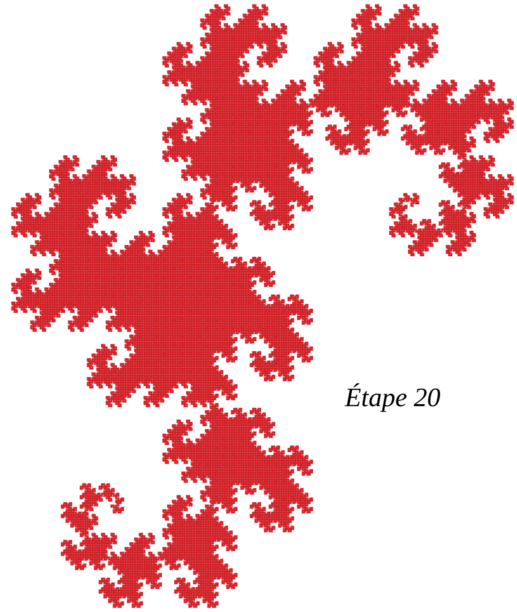
— on se donne n transformations t_1, t_2, …, t_n, chacune transformant [AB] en n segments $[AA_1]$, $[A_1A_2]$, …, $[A_{n-1}B]$;

— on obtient ainsi une « courbe » formée d'une suite de n segments allant de A à B.

Il suffit alors d'appliquer à chacun de ces segments les mêmes transformations que l'on a fait subir à [AB]. Et ainsi, indéfiniment, se construisent les fractales.

Appliquons les idées précédentes à la courbe du dragon de John Heighway (voir la fig. 3).

On a $n = 2$, on passe du segment [AB] au segment $[AA_1]$ par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$ suivie de l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et on passe de [AB] à $[A_1B]$ par la rotation de centre B, d'angle $-\frac{\pi}{4}$, suivie de l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



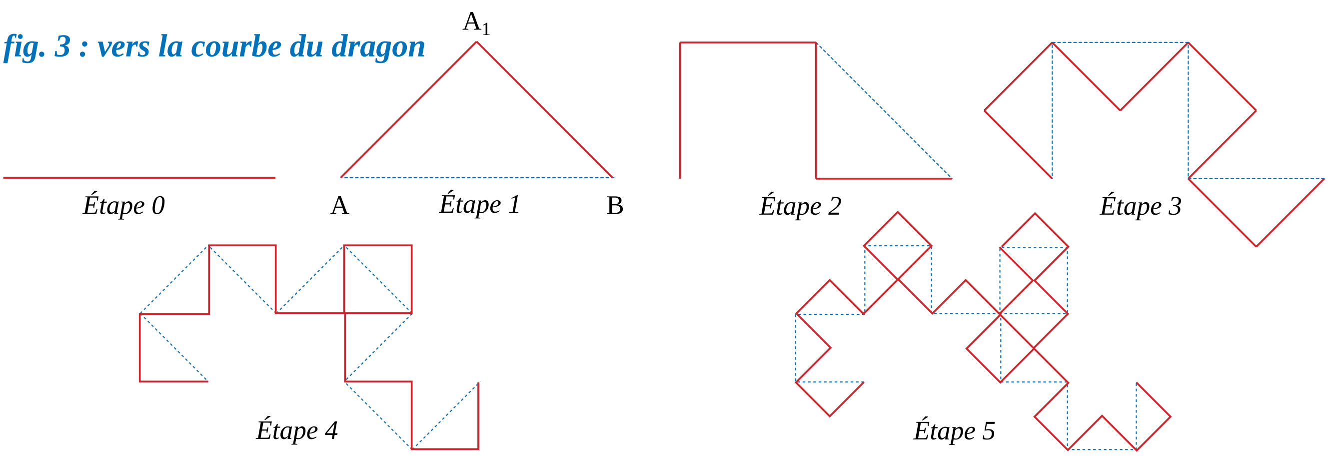
Étape 20

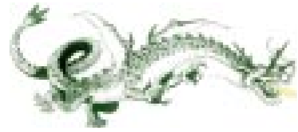
Cette courbe possède une construction étonnante : si l'on replie n fois une feuille de papier sur elle-même, toujours dans le même sens et en marquant bien les plis, et qu'on la déplie en conservant les plis à 90°, on obtient, en regardant la tranche, la $n$ième étape de construction de cette courbe. Faites l'expérience vous-même et vérifier que les plis obtenus ont bien la forme dessinée ci-dessous.

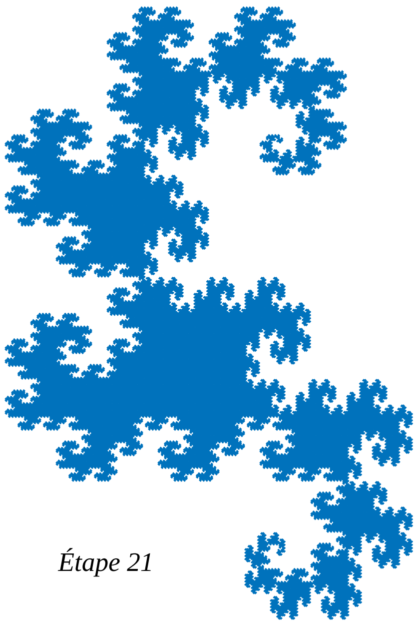
Évidemment, dans la pratique, l'épaisseur de la feuille fait qu'on dépasse difficilement l'étape 5 (et sur les dessins nous avons agrandi l'échelle à chaque étape, sinon les côtés de la cinquième étape ne devraient mesurer qu'un millimètre).

Les illustrations présentées à la page suivante permettent de voir que le dragon est la réunion des deux sous-dragons images de lui-même par une réduction de moitié.

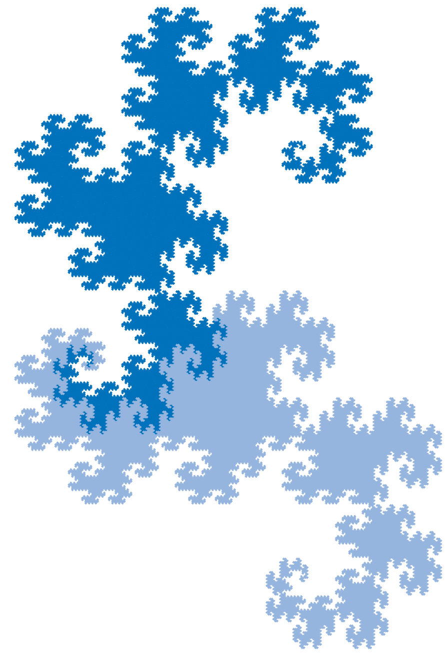
fig. 3 : vers la courbe du dragon

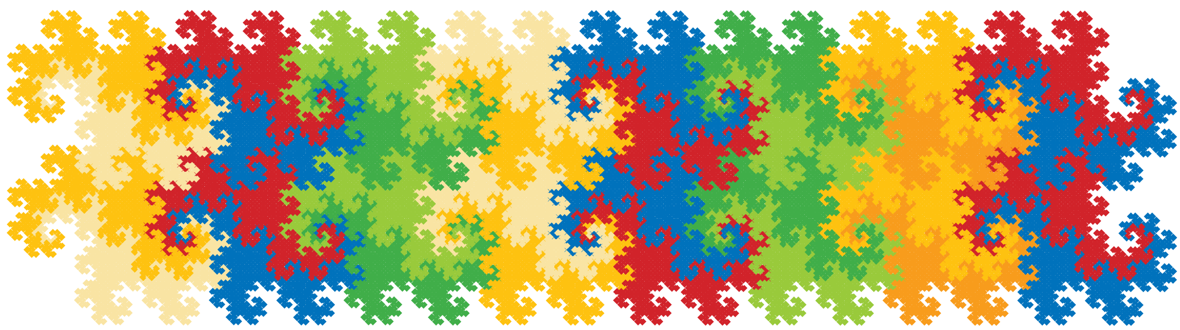






Étape 21

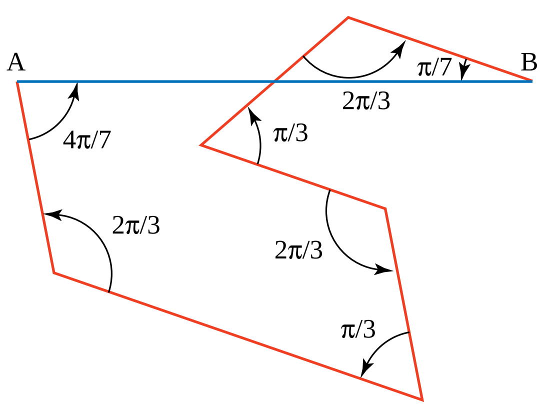




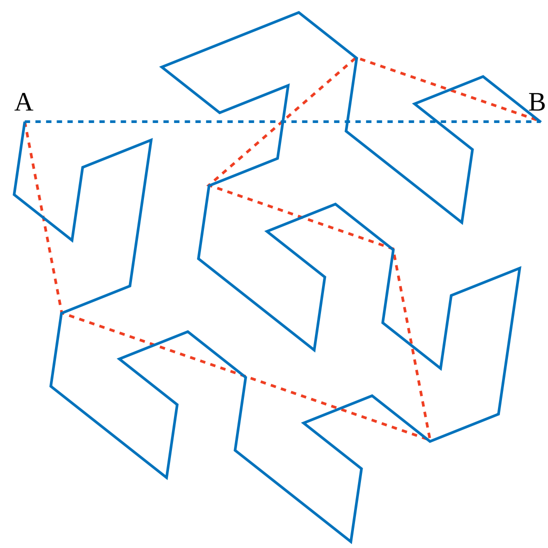
Cette propriété montre que les dragons peuvent paver le plan. A proposer aux fabricants de carrelages !

Donnons un autre exemple avec la courbe dite de Gosper.

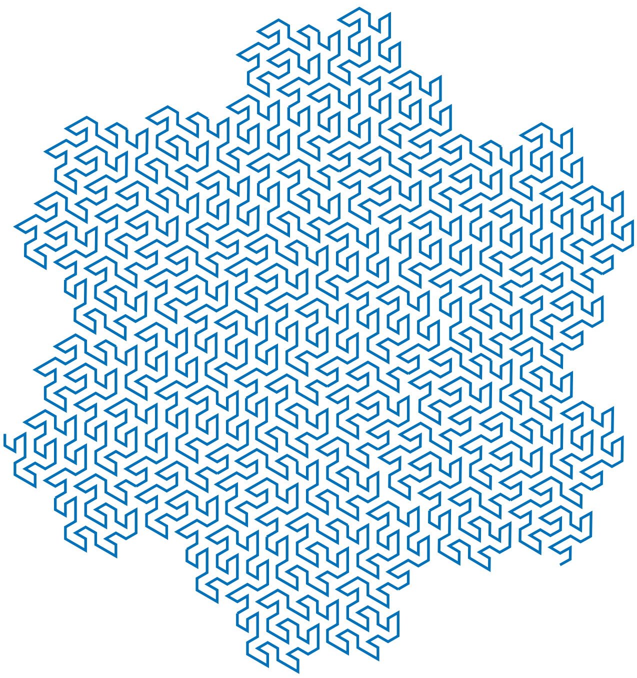
Ici $n = 7$. Les 7 transformations sont suggérées par la figure suivante :



Et voici la deuxième étape :



Et la septième étape :



Les dimensions des fractales

Les “courbes” précédentes méritent le nom d’**objet fractal**, dont il est temps de parler un peu plus précisément.

D’abord une vraie définition.

UN OBJET PEUT ÊTRE QUALIFIÉ DE FRACTAL S’IL POSSÈDE LA PROPRIÉTÉ SUIVANTE :

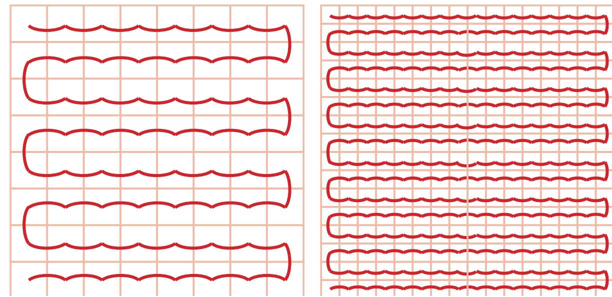
QUEL QUE SOIT LE NOMBRE K, IL CONTIENT UN MORCEAU QUI EST EXACTEMENT SA RÉDUCTION DANS UN RAPPORT PLUS PETIT QUE K.

Et maintenant quelques informations sur la “dimension” d’un objet fractal, dont nous avons déjà soupçonné qu’elle pouvait être **fractionnaire**.

L’idée qu’a eu un certain **Hausdorff** fut d’imaginer Peano tondant sa pelouse…

En fait, il s’agit de ***parcourir*** l’objet qui nous intéresse le plus complètement possible sans en oublier aucun recoin.

Regardons ce qui se passe d’abord sur une surface carrée en nous aidant d’un quadrillage.



En faisant des pas d’une case, combien faut-il de pas ? À peu près, 8×8.

En faisant des pas d’une moitié de case, combien faut-il de pas ? À peu près 16×16.

En faisant des pas deux fois plus petits, il en faut quatre fois plus.

En fait, pour parcourir un carré, voilà ce qui arrive : en faisant des pas x fois plus petits, le nombre de pas à faire est à peu près x^2 fois plus grand. L’exposant “2” est la “dimension” du carré. Un carré, comme beaucoup de surfaces, est de dimension deux.

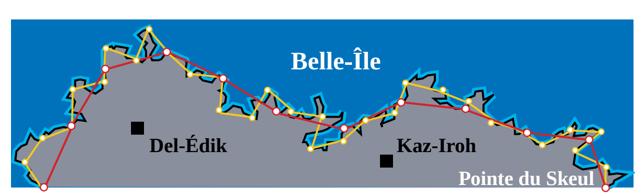
Voila l’idée qui traduit cette définition générale :

DÉFINITION. Chaque fois que, pour “parcourir” quelque chose, en faisant des pas x fois plus petits, le nombre de pas à faire est x^d fois plus grand, alors d est la “dimension” de ce quelque chose.

Avec une telle définition, la dimension de la courbe de Von Koch est de 1,2618 (car en faisant des pas 3 fois plus petits, on doit en faire 4 fois plus et 4 vaut $3^{1,2618}$).

La dimension de la courbe de Peano est de 2 (car en faisant des pas 2 fois plus petits, on doit en faire 4 fois plus et 4 vaut 2^2). Cette “courbe” remplissant un carré, il n’est pas étonnant que sa dimension soit celle d’un carré.

Ce qui est extraordinaire, c’est que la “dimension” de la côte de Bretagne ainsi mesurée est de l’ordre de 1,2 !!!



On peut constater, en effet, expérimentalement, le phénomène suivant : pour parcourir sept kilomètres de cette côte avec ses “bottes de 7 mètres”, l’ogre ferait 1000 pas.

On peut aussi constater que le petit poucet, suivant la côte “de plus près” grâce à ses pas de 70 cm (10 fois plus petits), ferait environ 15 800 pas (c’est-à-dire $10^{1,2}$ fois plus).

Et un petit goéland, faisant des pas de 7 cm en ferait environ 251 190 000 (c’est-à-dire $10^{1,2}$ fois plus).

Et une fourmi…

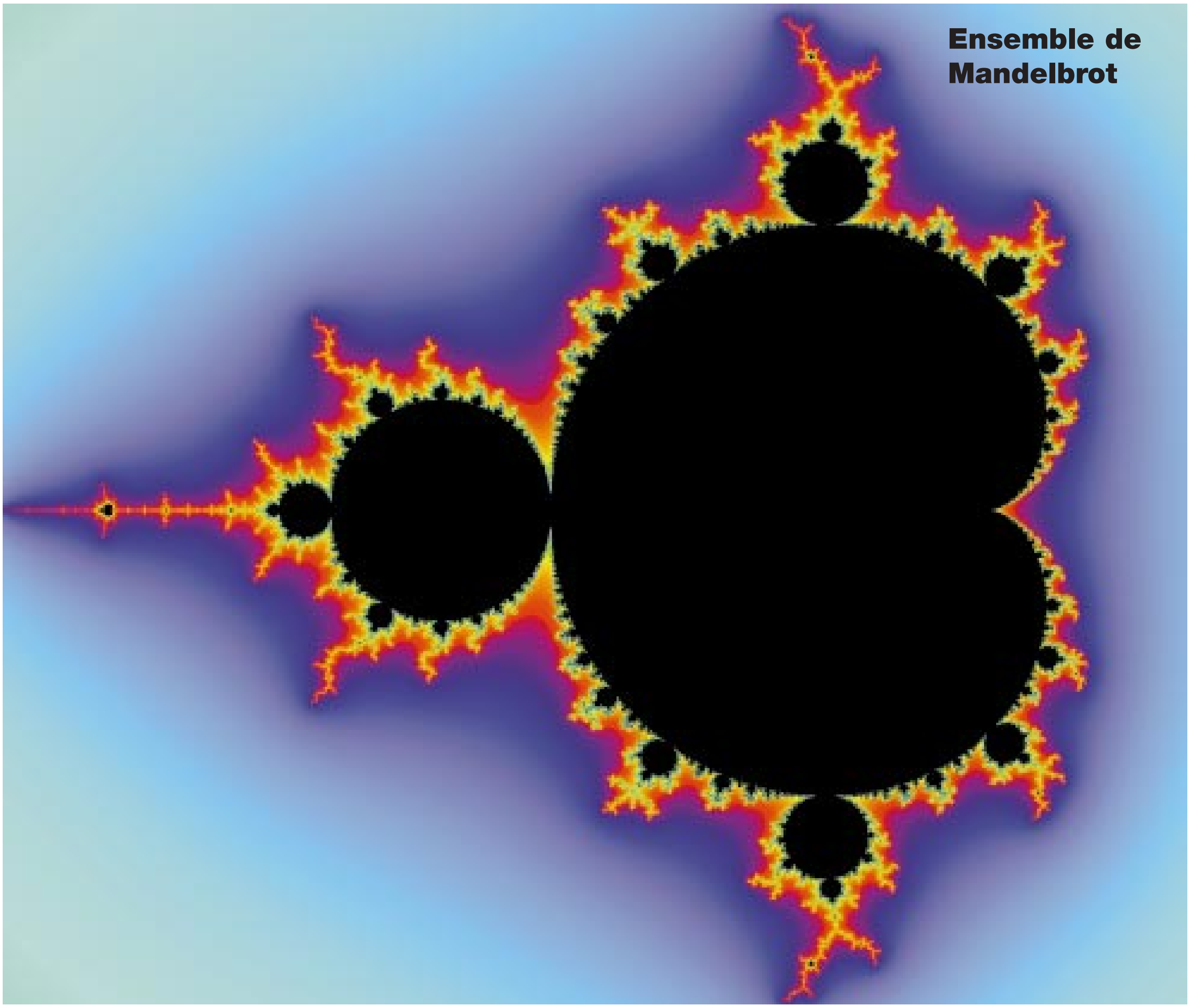
Julia et Mandelbrot

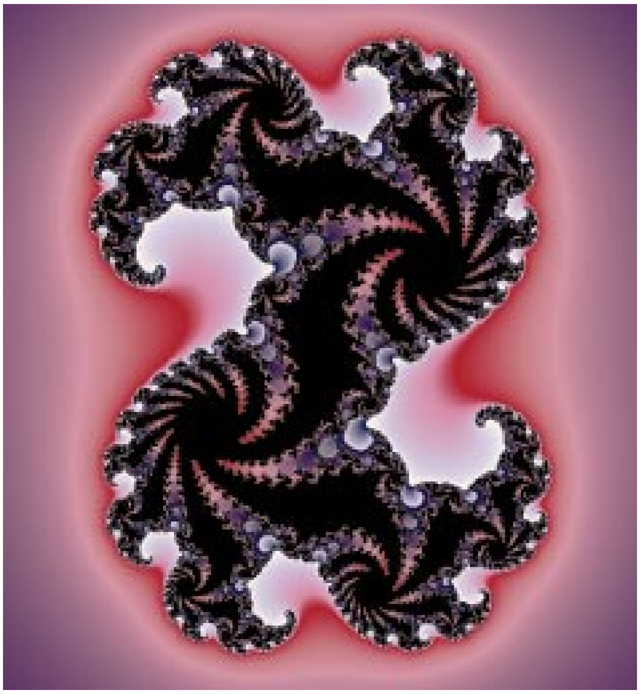
En fait, c’est avec les nombres complexes, étudiés en Terminale (et qui permettent de “calculer” avec des transformations), que l’on construit le plus facilement des fractales.

Par exemple, le mathématicien Gaston Julia (1892-1936) s’est ainsi intéressé aux suites de nombres complexes définies par $z_{n+1} = z_n^{\,2} + c$.

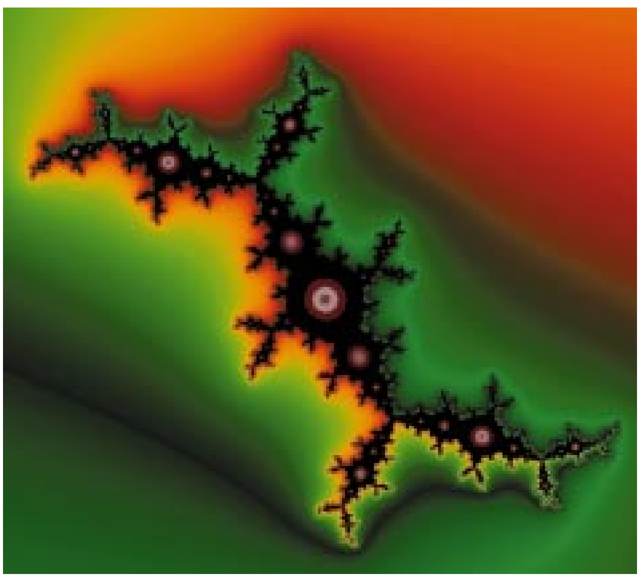
On note $P_c(X) = X^2 + c$. Selon la valeur de z_0, cette suite reste bornée ou non. On appelle ensemble de Julia du polynôme P_c la frontière de l’ensemble des z_0 donnant une suite bornée. Les images des intérieurs des ensembles de Julia sont souvent très belles (voir page 18).

Le mathématicien Benoît Mandelbrot, créateur du mot “fractal” désignant des courbes de ce type, a été associé à l’ensemble des c pour lesquels la suite définie par P_c reste bornée lorsque $z_0 = 0$ (voir dessin).

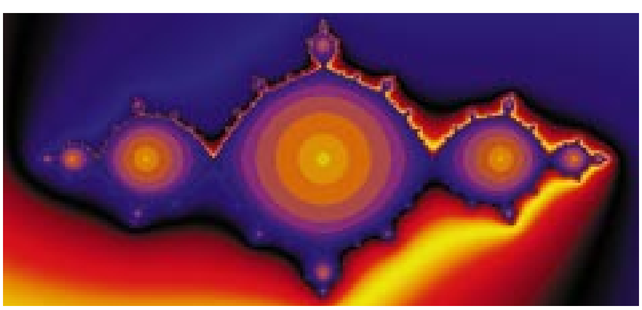




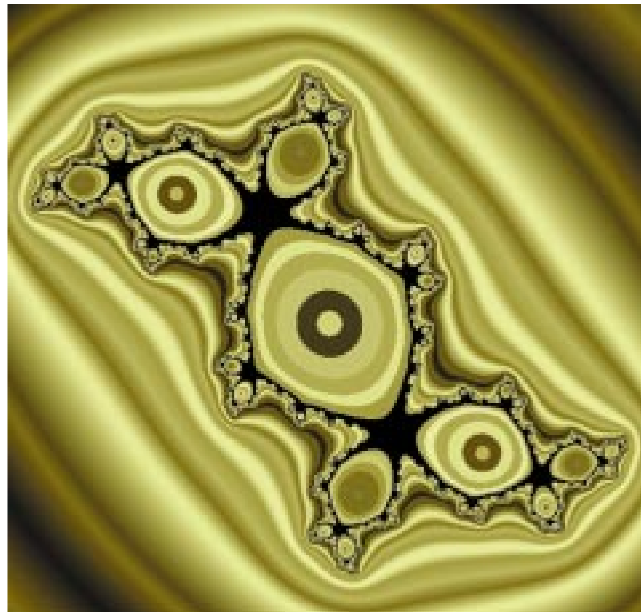
Ensemble de Julia, c = 0,32 + 0,043 i



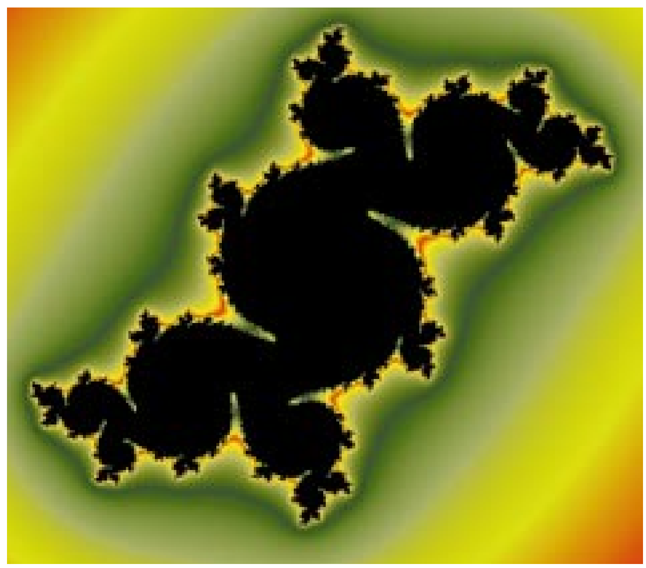
Ensemble de Julia, c = – 0,1134 + 0,8606 i



Ensemble de Julia, c = – 1



Ensemble de Julia, c = – 0,1225 + 0,74493 i



Ensemble de Julia, c = 1,245 + 0,465 i

Pour approfondir ces questions et en comprendre les sous-entendus, qu'est-ce que l'infini ? existe-t-il différents types d'infinis ?, on peut lire **Apprivoiser l'infini** (voir p. 32).