La machine à résoudre les équations de Jean Le Rond d'Alembert

1701-1800, le siècle des "Lumières" ! Vers le milieu de ce siècle, la Grande Encyclopédie de Messieurs Diderot et d'Alembert apporte ces lumières avec 35 énormes volumes de culture, de sciences et d'idées nouvelles, efficaces et généreuses.

Jean Le Rond

Dans cette Grande Encyclopédie, celui qui écrit le magnifique "discours préliminaire", et la plupart des articles mathématiques, signe d'un énigmatique ○. Mais il ne s'agit pas de la lettre O, c'est un simple rond.

ENCYCLOPÉDIE,
OU
DICTIONNAIRE RAISONNÉ
DES SCIENCES,
DES ARTS ET DES MÉTIERS.

Car cet homme, qui est né dans la 17ième année de ce début du siècle et qui mourra 17 ans avant sa fin, fut nommé, comme la tradition le voulait, du nom de l'église devant laquelle on le trouva le matin du 17 novembre 1717. Sa mère, Claudine du Tencin, maîtresse du Régent et d'autres grands du royaume, l'avait fait déposé la nuit précédente dans une petite boîte en sapin, bien douillette, sur les marches de l'église, aux bons soins des sœurs de Notre-Dame qui le recueillirent quelques heures après.

On le confia à une nourrice que Jean Le Rond aima comme sa mère et qu'il aida jusqu'à la fin de sa vie. Après ses études, payées par son père, le chevalier Destouches, Jean Le Rond d'Alembert se consacra aux mathématiques et aux problèmes du monde physique qu'elle permet de résoudre. Il fut, tout à la fois un des plus grands théoriciens de son siècle, un remarquable praticien et un homme du monde.

L'homme de sciences

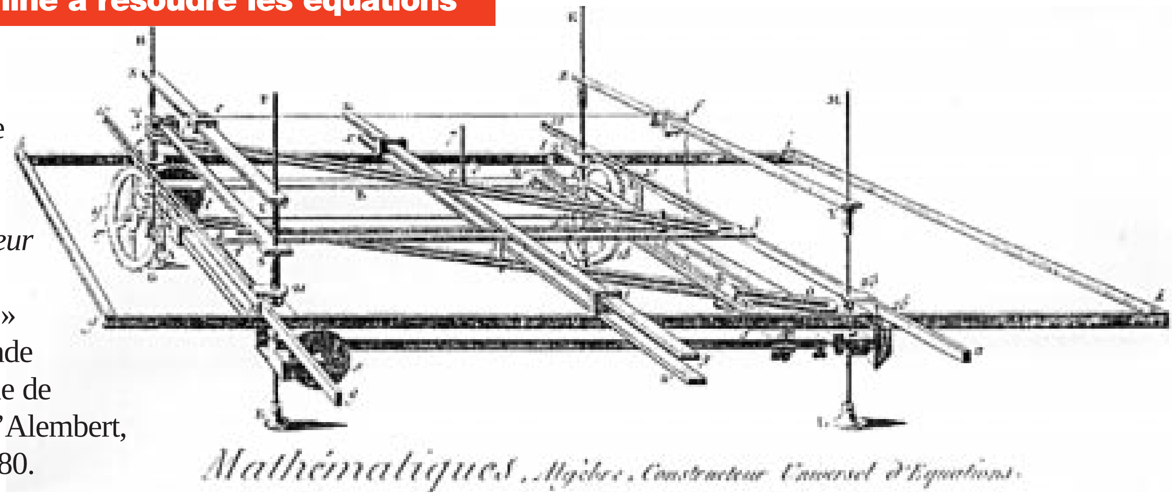
Étudiait-il les "causes générales des vents" ou "l'équilibre et le mouvement des solides ou des fluides" ? et voici qu'il publiait un *Traité de dynamique* (1743) où il énonca un principe d'équilibre (qui porte aujourd'hui son nom) permettant d'établir la mécanique sur des bases solides et élémentaires. « Quand un corps se déplace, écrit-il, c'est qu'il est mû par certaines forces. Il y a donc égalité, ou équilibre, entre ces forces et les changements intervenant dans le mouvement. Autrement dit, c'est comme si le corps était en équilibre, tout en se déplaçant. »

F = A, les forces (F) sont égales aux changements dans le mouvement (A), précisément dénommées "accélératrices".

Étudiait-il les équations ? et voilà qu'il énonçait le théorème fondamental de l'algèbre qui affirme que toute équation algébrique de degré n admet au plus n racines réelles ou complexes et qu'il fabriquait une machine qui, avec des barres et des molettes, permettait de trouver leurs solutions !

La machine à résoudre les équations

La machine illustrée ci-contre figure avec la légende « *Constructeur universel d'équations* » dans la Grande Encyclopédie de Diderot et d'Alembert, éditée en 1780.



L'appareil représenté permet de trouver, par certaines manipulations des parties mobiles, les solutions approchées d'une équation du type

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

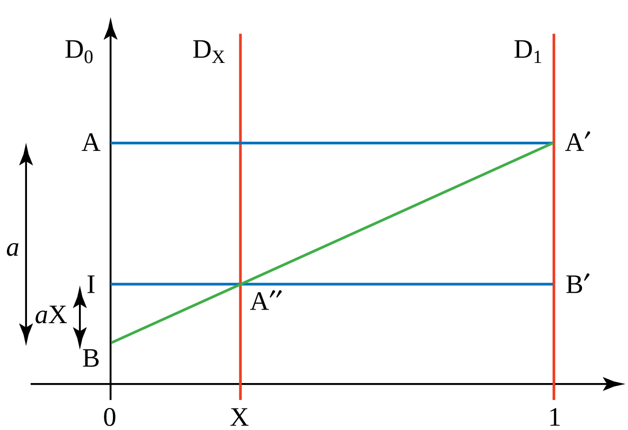
En fait cette machine « calcule » la valeur de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ grâce à une astucieuse successions d'utilisations du théorème de Thalès.

Voyons en le détail.

La figure ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, les droites “verticales” D_0, D_X, D_1 d'équations respectives $x = 0$, $x = X$ et $x = 1$. Les points A et B appartiennent à l'axe des ordonnées et leur distance mutuelle vaut a. La parallèle à l'axe (Ox) passant par A coupe D_1 en A′ et la droite (A′B) coupe DX en A″. Finalement, la parallèle à (Ox) passant par A″ coupe D_1 en B′ et D_0 en I.

D'après le théorème de Thalès, $\dfrac{\text{IB}}{\text{A''I}} = \dfrac{\text{AB}}{\text{AA'}}$.

On en déduit que la différence des ordonnées de A″ et B vaut aX.



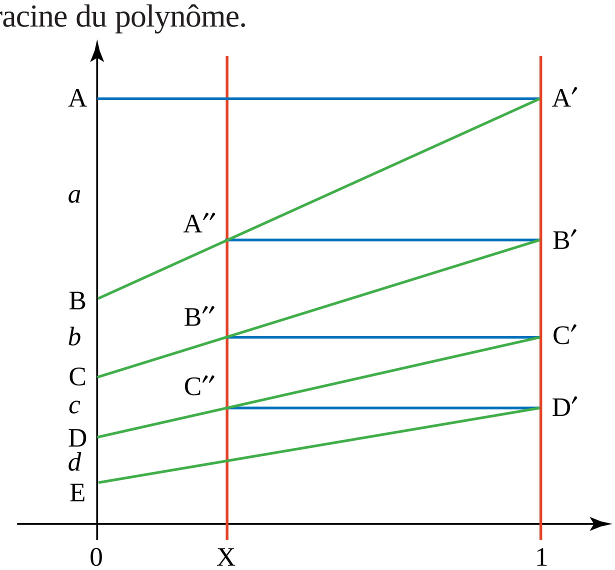
On marque les points B, C, D, E sur l'axe des ordonnées de façon que les distances BC, CD, DE soient égales à b, c, d.

Comme on l'a fait précédemment, on marque les points B′, B″, C′, C″, D′ et D″.

On laisse au lecteur le plaisir de montrer successivement que la différence des ordonnées de B″ et C vaut $(a\text{X} + b)\text{X}$, que la différences des ordonnées de C″ et D vaut $((a\text{X} + b)\text{X} + c)\,\text{X}$, que la différence des ordonnées de C″ et E vaut $((a\text{X} + b)\text{X} + c)\text{X} + d$, ce qui est la valeur du polynôme $f(\text{X})$.

La machine de d'Alembert est conçue de façon que les différents segments de la figure précédente aient des extrémités pouvant se déplacer le long de réglettes prévues à cet effet.

Et si cette valeur est nulle, c'est que C″ et E sont sur la même ligne horizontale et que l'abscisse X est racine du polynôme.



En fait, la machine n'est pas vraiment réalisable pratiquement (Une réalisation légèrement modifiée est exposée au Palais de la Découverte dans le cadre de l'exposition "*Au delà du compas, les courbes*"). Mais, ce qui est extraordinaire, c'est que le procédé de calcul qu'elle utilise est aujourd'hui très efficace avec les ordinateurs !

En effet, ce procédé de calcul appelé **algorithme de Hörner** consiste à calculer $(((ax + b)x + c)x + d$ en place de $ax^3 + bx^2 + cx + d$. (Vérifiez l'égalité des deux expressions !)

Le premier procédé amène à faire 3 additions et 3 multiplications alors que le second oblige à exécuter 3 additions et **6** multiplications !

Cette économie de multiplications devient vite fantastique pour des polynômes plus compliqués, et c'est comme cela qu'il faut programmer vos calculs sur une machine : ajouter un coefficient, multiplier par x, ajouter un coefficient, multiplier par x…

Le philosophe

Ainsi occupé par le remue-ménage des idées et le développement des techniques, académicien, ami de Diderot, de Voltaire, du roi Frédéric II de Prusse et de la Grande Catherine de Russie, il aimait bien aller se faire moquer par sa nourrice, madame Rousseau : « Vous ne serez jamais qu'un philosophe, lui disait-elle. Et qu'est-ce qu'un philosophe ? Un fou qui se tourmente pendant sa vie, pour qu'on parle de lui quand il sera mort ! »

D'Alembert à sa table de travail

L'homme du monde

Il aimait les discussions et passait les nuits dans les salons où se bâtissait le monde. On le voyait avec Montesquieu, Fontenelle ou Turgot, chez Madame du Duffant, chez Madame de Lambert, chez Madame Geoffrin, ou bien aux diners de Madame de la Fayette ou de la duchesse de Luxembourg.

Mais "son" salon, là où l'Encyclopédie pris naissance et devint "Grande", c'était celui que tenait Julie de Lespinasse au coin de la rue de Bellechasse et de la rue Saint-Dominique. Non seulement il y était tous les soirs mais il finit par habiter l'étage au-dessus, où la belle Julie pouvait le "soigner de ses fièvres".

C'est là qu'il écrivit ses articles didactiques pour l'Encyclopédie, ses *Mélanges philosophiques*, ses *Recherches sur le Calcul Intégral* (où l'on trouve un essai de démonstration de "son" théorème fondamental de l'algèbre), ses *Mémoires sur les principes de mécanique* et ses *Recherches sur différents points importants du système du Monde*.

Et il faisait tout cela avec élégance et dignité, dans ce monde à la fois changeant et par certains côtés étonnamment immobile… car c'est à la même époque que les bigots, crème des intégristes de tous les temps, firent décapiter le Chevalier de la Barre, pour ne s'être pas découvert au passage d'une sainte procession !

D'Alembert, lui aussi, comme toutes les lumières de son siècle, eut maille à partir avec les obscurantismes de tous horizons. Au point que le roi Frédéric II de Prusse, lui-même, lui écrivait des poèmes de consolation :

Continuez en paix loin de leurs cris rebelles
Vos découvertes immortelles ;
Tandis que leur audace ameute des pervers,
Et qu'à son tribunal l'idiot vous assigne,
Par un sort plus noble et plus digne
Vous éclairerez l'Univers.